DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Registo:____________

Rubrica: ____________

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2022/23
Cursos: LEIC-A

Teste 1 (Versão A)

19 de Outubro de 2023, 19h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes (excepto nas perguntas de escolha múltipla).
Duração: 45m.

1. Sendo α um número real arbitrário, considere o problema de valor inicial

$$y' - 2xy = x \quad , \quad y(0) = \alpha$$

(a) Determine a solução geral da equação.
Resolução:
Trata-se de uma equação linear já na forma simplificada. O factor integrante é

$$\mu(x) = e^{\int(-2x)\,dx} = e^{-x^2}$$

e assim

$$y' - 2xy = x \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{-x^2}y\right)' = xe^{-x^2}$$

Tendo-se então que a solução geral da equação é

$$y(x) = e^{x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C\right) = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}$$

com $c \in \mathbb{R}$.

(b) Calcule a soluçao do (PVI).
Resolução:
Usando a resposta da alínea anterior

$$y(0) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} + c = \alpha$$

pelo que $C = \alpha + \frac{1}{2}$ e a solução do (PVI) é

$$y(x) = -\frac{1}{2} + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)e^{x^2}$$

(c) Qual o valor de α para o qual a solução do (PVI) é limitada em em $\mathbb{R}^+$?
Resolução:
Atendendo a que a função e^{x^2} é ilimitada em $\mathbb{R}^+$, o seu coeficiente terá que ser nulo para que a solução do (PVI) seja limitada nesse conjunto. Assim $\alpha = -\frac{1}{2}$.

2. Considere a equação diferencial

$$4xy - 2e^{2x} + (2x^2 - 6y)\frac{dy}{dx} = 0$$

(a) Verifique que se trata de uma equação exacta.

Resolução:

Definindo

$$M(x,y) = 4xy - 2e^{2x} \qquad , \qquad N(x,y) = 2x^2 - 6y$$

verifica-se que

- são ambas de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$;
- $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 4x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Conclui-se que (M,N) é um campo gradiente em $\mathbb{R}^2$ e assim a equação é exacta.

(b) Calcule a solução geral da equação (pode apresentar o resultado na forma implícita).

Resolução:

Então, existe $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\, \phi = (M,N)$. Então

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 4xy - 2e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x,y) = 2x^2y - e^{2x} + c(y)$$

e assim

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\big(2x^2y - e^{2x} + c(y)\big) = 2x^2 - 6y \quad \Leftrightarrow \quad c'(y) = -6y$$

Tem-se então que $c(y) = -3y^2 + c$ e assim

$$\phi(x,y) = 2x^2y - e^{2x} - 3y^2 + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Finalmente, por ser uma equação exacta

$$4xy - 2e^{2x} + (2x^2 - 6y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Big(2x^2y - e^{2x} - 3y^2 + c\Big)' = 0$$

Primitivando em x, obtemos a forma implícita da solição geral da equação

$$2x^2y - e^{2x} - 3y^2 + = k \qquad , \qquad k \in \mathbb{R}$$

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine e^{At}

Resolução:

Para calcular e^{At}, começemos por resolver a equação vectorial $Y' = AY$ para $Y = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim

$$Y' = AY \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

Substituindo y por $-x'$ na segunda equação

$$-x'' = -2x - x' \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - D - 2)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D+1)(D-2)x = 0$$

pelo que uma base para o espaço de soluções da equação é (por exemplo) $\mathcal{B} = \{e^{-t},\, e^{2t}\}$ e assim

$$x(t) = ae^{-t} + be^{2t} \quad , \quad a,\, b \in \mathbb{R}$$

e então

$$y(t) = -x' = ae^{-t} - 2be^{2t}$$

Tem-se então que a solução da equação é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{-t} + be^{2t} \\ ae^{-t} - 2be^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & -2e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & -2e^{2t} \end{bmatrix}$$

é uma (MSF) associada à equação, e atendendo a que $S(0) \neq Id$, teremos então que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & -2e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2e^{-t} + e^{2t} & e^{-t} - e^{2t} \\ 2e^{-t} - 2 & e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

(b) Sendo $\mathbf{Y}(t)$ a solução do (PVI)

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} \qquad , \qquad \mathbf{Y}(0) = (1, 1)$$

calcule

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{Y}(t)$$

Resolução:

Note-se que a (MSF) calculada na alínea, tem a forma

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

tendo-se então que o vector $(1, 1)$ é um vector próprio associado ao valor próprio -1. Assim sendo, se $(x(0), y(0)) = (1, 1)$ sabemos que, a solução do (PVI) pertencerá ao espaço gerado por esse vector, isto é verificará o seguinte

$$e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Big\langle)1, 1) \Big\rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e assim

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{Y}(t) = \lim_{t \to +\infty} \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obs. Atendendo a que a solução do (PVI) é dada por

$$Y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

poderá também fazer os cálculos e calcular directamente o limite.

4. Para cada alínea escolha a opção correcta

(a) Uma solução particular da equação

$$y''' + 4y' = 0$$

é

A. $1 + 2\cos(2x)$ B. $2\cos(2x) + x$ C. $\text{sen}(x)$ D. $2x + \cos x$

Resolução:

$$y''' + 4y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^3 - D)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D(D-1)(D+1)y = 0$$

Assim as aoluções da equação são geradas pelas funções (por exemplo) 1, e^x e e^{-x}. Assim a resposta correcta é $1 + 2\cos(2x)$

(b) A equação diferencial de menor ordem possível da qual a função xe^{-x} é solução, é .

A. $y'' + 4y = 0$ B. $y'' - 2y' + y = 0'$ C. $y' + 2y = 0$ D. $y'' + 2y' + y = 0$

Resolução:

Sendo xe^{-x} solução dessa equação, então e^{-x} tambésm será. Pelo que o polinómio diferencial associado de menor ordem possível, tem raíz -1 de multiplicidade 2. Pelo que será

$$P_A(D) = (D+1)^2$$

e a resposta correcta é

$$(D+1)^2 y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' + 2y' + y = 0$$

(c) O intervalo máximo de existência da solução do (PVI)

$$y' = -\frac{4x}{y} \qquad , \qquad y(0) = -4$$

é

A. $[-2, 2]$ B. $]-2, 2[$ C. $]0, 2[$ D. $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

Resolução:

Comecemos por resolver a equação. Trata-se de uma equação separável, e assim

$$y' = -\frac{4x}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \int y\, dy = -\int 4t\, dt + c \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = -4t^2 + c$$

com $c \in \mathbb{R}$. Para que $y(0) = -4 < 0$, conclui-se que $c = 4$ e a solução do (PVI) é

$$y(t) = -\sqrt{4 - t^2}$$

Finalmente, o intervalo máximo de solução é o **maior intervalo onde $y(t)$ e $y'(t)$** são contínuas. Assim a resposta correcta é

$$I_{\text{Max}} =]-2, 2[$$