DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Registo:______________

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/24

Cursos: LEIC-A

TESTE 2 (VERSÃO B)

30 DE NOVEMBRO DE 2023, 19H

1. Considere o campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left(x^2+y^2,\ y^2+z^2\ ,z^2+x^2\right)\ .$$

(a) (2 val.) Calcule $\operatorname{rot} F$.

Resolução:

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & z^2+x^2 \end{vmatrix} = (-2z,\ -2x,\ -2y)$$

(b) (3 val.) Calcule a divergência do campo vectorial

$$G(x,y,z) = F(x,y,z) + \operatorname{rot} F(x,y,z)$$

Resolução:

$$\operatorname{div} G(x,y,z) = \operatorname{div} F(x,y,z) + \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)(x,y,z)}_{=0} = 2x+2y+2z$$

2. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z)\ :\ z = 1-x\ \ , x^2+y^2<1\}$$

(a) (1 val.) Escreva uma parametrização para S.

Resolução:

Dado que a superfície é a porção do plano $z = 1-x$ que se encontra no interior do cilindro $x^2+y^2=1$,

$$g(x,y) = (x,y,1-x) \quad , \quad D = \{(x,y)\ ,\ x^2+y^2<1\}$$

(b) (2 val.) Calcule um vector unitário normal à superfície num ponto arbitrário da mesma.

Resolução:

Um vector normal a S num ponto $(a, b, c) \in S$ é dado por

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 0, 1)$$

Tem-se então que um vector normal unitário a um ponto aarbitrário de S é

$$\overrightarrow{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$$

(c) (2 val.) Calcule a área de S

Resolução:

Usando as alíneas anteriores

$$\text{Area}(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dx\, dy = \iint_D \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2}\, \text{Area}(D) = \sqrt{2}\pi$$

3. Seja F o campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = (3xy + \text{sen}(y^2 + z^2)\,,\ xz\,,\ 3yz + \cos(x^2 + y^2))$$

(a) (2 val.) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através da superfície que é a fronteira do sólido

$$V = \{(x, y, z)\ : x^2 + z^2 < y < 2\}$$

na direção da normal exterior a V.

Resolução:

Comecemos por verificar as hipóteses do Teorema da Divergência:

- F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$;
- S é uma superfície fechada pois é a superfície do sólido V:
- considera-se a normal $\overrightarrow{\nu}$ exterior a V.

Então, por aplicação (directa) do Teorema da Divergênvia

$$\begin{aligned} \text{Fluxo}(F, S, \nu) &= \iint_S F(x, y, z) \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS \\ &= \iiint_V \text{div}\, F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_V 6y\, dx\, dy\, dz \end{aligned}$$

Atendendo à definição de V, podemos usar coordenadas cilíndricas para calcular o integral triplo. Tem-se então que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = y \\ z = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad , r \in]0, \sqrt{2}[\quad , \quad \theta \in]0, 2\pi[\quad , \quad y \in]r^2, 2[\quad , \quad |J| = r$$

e assim

$$\begin{aligned} \text{Fluxo}(F, S, \nu) &= \int_0^{\sqrt{2}} \Big[\int_0^{2\pi} \Big(\int_{r^2}^{2} 6yr\,dy \Big) d\theta \Big] dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \Big(\int_0^{2\pi} 3r(4 - r^4) d\theta \Big) dr \\ &= 6\pi \Big(2r^2 - \frac{r^6}{6} \Big|_0^{\sqrt{2}} = 16\pi \end{aligned}$$

(b) (4 val.) Calcule o fluxo de F através da superfície

$$S\{(x,y,z)\ :\ x^2+z^2=y\ ,\ y<2\}$$

na direcção da normal a S com segunda componente negativa.

Resolução:

Observa-se que:

- S **não é** uma superfície fechada, pois é apenas a superfície de um parabolóide;
- calcular o fluxo por definição poderá envolver muitos cálculos devido à forma de F.

Iremos então "tapar" a superfície a fim de podermos usar o Teorema da Divergência. Seja então

$$\Sigma = S \cup T$$

sendo S a superfície dada e T a tampa definida por por

$$T = \{(x,y,z)\,;\ x^2+z^2<2\,,\ y=2\}$$

Sendo a normal a S, $\overrightarrow{\nu}_S$ com segunda componente negativa, corresponde à normal exterior a Σ e assim vê-se facilmente que teremos de considerar como normal a T, $\overrightarrow{\nu}_T=(0,1,0)$. Assim

- F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$;
- Σ é uma superfície fechada pois é a superfície do sólido V (da alínea anterior);
- considera-se a normal $\overrightarrow{\nu}$ que por construção é exterior a V.

Então, usando o Teorema da Divergência

$$\text{Fluxo}(F,\Sigma,\overrightarrow{\nu}) = \iint_\Sigma F\cdot\overrightarrow{\nu}\,ds = \iiint_V \operatorname{div}F\,dx\,dy\,dz = 16\pi$$

visto que este é o integral calculado na alínea (a). Por outro lado visto que

$$\Sigma = S\cup T \quad \Rightarrow \quad \text{Fluxo}(F,\Sigma,\overrightarrow{\nu}) = \text{Fluxo}(F,S,\overrightarrow{\nu}_S)+\text{Fluxo}(F,T,\overrightarrow{\nu}_T)$$

Pelo que o fluxo pedido é

$$\text{Fluxo}(F,S,\overrightarrow{\nu}_S) = 16\pi - \text{Fluxo}(F,T,\overrightarrow{\nu}_T)$$

e assim falta calcular o fluxo de F através da tampa T na direção da normal $(0,1,0)$. Uma parametrização de T é por exemplo

$$g(x,z)=(x,2,z)\quad,\quad x^2+z^2<2$$

Então

$$\text{Fluxo}(F,T,\overrightarrow{\nu}_T) = \iint_{x^2+z^2<2} F(x,2,z)\cdot(0,1,)\,dy\,dz = \iint_{x^2+z^2<2} xz\,dx\,dz$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares

$$(x,z)=(r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta)\quad,\quad r\in]0,\sqrt{2}[\ \ ,\ \ \theta\in]0,2\pi[$$

tem-se que

$$\text{Fluxo}(F,T,\overrightarrow{\nu}_T) = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} r^3\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta\,dr = 0$$

e finalmente

$$\text{Fluxo}(F,S,\overrightarrow{\nu}_S) = 16pi$$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = (1+y^2)f(ty) \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) (1 val.) Mostre que este problema tem uma solução única numa vizinhança de $t_0 = 0$.

Resolução:

Para concluir que o (PVI) admite uma única solução definida localmente, vamos aplicar o Teorema de Picard. Assim

- Para $F(t,y) = (1+y^2)f(ty)$ e dado que a função f é por hipótese de classe C^1 em $\mathbb{R}$, é fácil de concluir que
  - F é contínua em $\mathbb{R}^2$;
  - $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$

  pelo que F verifica as condições do Teorema de Picard no conjunto aberto $D = \mathbb{R}^2$.
- $(t_0, y_0) = (0.0)$ pertence a D.

O Teorema de Picard permite concluir que o (PVI) admite uma única solução, $S(t)$, definida para t pertencente a uma vizinhança de 0, $V_0 =]-\epsilon, \epsilon]$ para certo $\epsilon > 0$.

(b) (3 val.) Suponha que, adicionalmente, f satisfaz $f(x) \geq 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Mostre que o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado.

Resolução:

Pelo Teorema de Extensão de Soluções, $S(t)$, obtida via Teorema de Picard, pode ser prolongada a um intervalo máximo $I_{max} =]a, b[\ni 0$. Queremos mostrar que $b > 0$ é finito. Para tal

- ou
$$\lim_{t \to b^-} (t, S(t)) \notin D$$
  o que não acontece visto $D = \mathbb{R}^2$;
- ou $S(t)$ explode em b. Para mostrar este facto, vamos usar o Teorema da Comparação de Soluções. Dado que
$$\dot{y} = (1+y^2)f(ty) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{y}}{1+y^2} = f(ty)$$
  Integrando em t obtém-se
$$\int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{1+y^2(s)} ds = \int_0^t f(s\,y(s))\,ds$$
  pelo que
$$\operatorname{arctg} y(t) - \operatorname{arctg} y(0) = \int_0^t f(s\,y(s))\,ds$$
  Visto $y(0) = 0$
$$y(t) = \operatorname{tg}\Big(\int_0^t f(s\,y(s))\,ds\Big)$$
  Se $f(x) \geq 1$ e atendendo a que a função tangente é monótona crescente em $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, podemos escrever
$$y(t) \geq \operatorname{tg}\Big(\int_0^t 1\, ds\Big) = \operatorname{tg} t$$
  Como $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} t = \infty$ a solução explode e como tal o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado.