TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2^{o} Semestre 2015/2016

Curso: MEAmbi, MEBiol, MEQ

Ficha de Problemas nº 8

Equações Diferenciais de 1ª ordem: separáveis, exactas e redutíveis a exacta

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

(a) $x^3 + (y+1)^2 \dfrac{dy}{dx} = 0$ (b) $\varphi' = e^{\varphi - t}$ (c) $xy + (1+x^2)y' = 0$

(d) $\text{sen}\,(\pi x)\dfrac{dy}{dx} = \pi y \cos(\pi x)$ (e) $2ty^3 + 3t^2y^2y' = 0$ (f) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2+1}{t+1}$, $t > -1$

(g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3}{y^2+1}$ (h) $\dfrac{dy}{dx} = xy + 2x + y + 2$ (i) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$

2. Determine a forma das soluções dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y' + (x+2)y^2 = 0$, $y(0) = 1$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = (1+y^2)(x-\pi)$, $y(2\pi) = 1$

(c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t^3}{y^2+1}$, $y(1) = 0$ (d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y-3}$, $y(0) = -1$

3. Considere a equação diferencial separável $x' = x\,\text{sen}\, t + x^2 \text{sen}\, t$. Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, e determine o seu intervalo máximo de existência.

4. Resolva as seguintes equações diferenciais, efectuando a mudança de variável indicada:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+y^2}{xy}$, $y(x) = xv(x)$ (b) $y' = (x+y)^2$, $v(x) = x + y(x)$

5. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

a) Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável.

b) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1$$

indicando o intervalo máximo de solução.

6. Para cada uma das seguintes equações, mostre que é exacta e resolva-a. Se possível apresente a solução na forma explícita.

a) $2x - x^3 + y^2 + 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y^2}{2xy}$ com $x > 0$ e $y > 0$

c) $e^x + 2xy^2 + (\cos y + 2x^2 y)\dfrac{dy}{dx} = 0$ (d) $(\cos(x+y) + e^y)y' + \cos(x+y) = 0$

7. Determine a solução do problema de Cauchy

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0 \qquad , \qquad x(0) = 1$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

8. Mostre que cada uma das seguintes equações diferenciais não é exata. Determine um factor integrante e a solução geral da equação.

a) $2xy - x - \dfrac{dy}{dx} = 0$ (b) $y^2 - x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$

c) $e^{x+y} + ye^y + (xe^y - 1)\dfrac{dy}{dx} = 0$ (d) $-2y^3 + 1 + (3xy^2 + x^3)\dfrac{dy}{dx} = 0$

9. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + \left(y^3 - \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$$

c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

10. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

11. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2\left(\dfrac{1}{x} + \log x\right) + 2y\log x\dfrac{dy}{dx} &= 0 \\ \\ y(e) &= -1 \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

12. Considere a equação diferencial ordinária

$$3xy^2 + (2x + 3x^2y)y' = 0 \tag{2}$$

a) Mostre que esta equação não é exacta.

b) Mostre que (2) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.

c) Mostre que a solução de (2) com condição inicial $y(1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $3xy + 2\log y = 3$.

d) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto 1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.

13. Considere uma população num eco-sistema, $P(t)$, cujo crescimento é proporcional a $P(t)$ e à quantidade de recursos disponíveis. A quantidade de recursos disponíveis é proporcional a $\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)$, onde K é a *capacidade de carga* (a população máxima que os recursos do eco-sistema conseguem suportar). A função $P(t)$ evolui de acordo com a *equação logística*:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Admitindo que $P(0) = P_0 \geq 0$.

a) Sendo $x(t) = \frac{P(t)}{K}$ e $x_0 = \frac{P_0}{K}$, escreva o problema de valor inicial satisfeito por $x(t)$ e resolva-o.

b) Determine $P(t)$ para qualquer $t \geq 0$, e calcule o $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$. Esboce os gráficos das soluções obtidas nos casos $P_0 = 0$, $0 < P_0 < K$, $P_0 = K$ e $P_0 > K$.

Soluções

1. a) $-1+\sqrt[3]{C-\frac{3x^4}{4}}$ b) $-\text{log}\,(e^{-t}+C)$ c) $\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$ d) $C\text{sen}\,(\pi x)$ e) $Ct^{-2/3}$

f) $\text{tg}\,(\text{log}\,(t+1)+C)$ g) $4y^3+12y=3x^4+c$ h) $-2+ce^{\frac{x^2}{2}+x}$ i) $\text{tg}\left(x-\frac{x^2}{2}+C\right)$

2. (a) $y(x)=\frac{2}{x^2+4x+2}$ (b) $y(x)=\text{tg}\,(\frac{x^2}{2}-\pi x+\frac{\pi}{4})$ (d) $y(x)=3-\sqrt{16-x^2}$

(c) A solução do (PVI) é definida implicitamente por $\frac{y^3}{3}+y=\frac{t^4-1}{4}$,

3. $x(t)=\frac{2e^{-\cos t}}{1-2e^{-\cos t}}$, $I_{\max}=\,]\arccos(\text{log}\,2)\,,\,2\pi-\arccos(\text{log}\,2)\,[$

4. a) $y(x)=x\text{log}\,|x|+cx$ b) $y(x)=-x+\text{tg}\,(x+c)$

5. a) $\dfrac{\dot{v}}{bf(v)+a}=1$ b) $y(t)=1-2t-\text{log}\,(1-t)$, $I_{\max}=]-\infty,1[$

6. a) $y(x)=\sqrt{\frac{c-4x^2+x^4}{4x}}$ ou $y(x)=-\sqrt{\frac{c-4x^2+x^4}{4x}}$ b) $y(x)=\sqrt{\frac{c+x^2}{2x}}$
c) Forma implícita $e^x+x^2y^2+\text{sen}\,y=c$ d) Forma implícita $\text{sen}\,(x+y)+e^y=c$

7. $x(t)=-t^2+\sqrt{t^4-t^3+1}$, $I_{\max}=\mathbb{R}$

8. a) $y(x)=\frac{1}{2}+ce^{x^2}$ b) $y(x)=\sqrt{ce^{-x}+x-1}$ ou $y(x)=-\sqrt{ce^{-x}+x-1}$
c) Forma inplícita $e^x+xy+e^{-y}=c$ d) Forma inplícita $y^3x^{-2}-\frac{x^{-2}}{2}+y=c$

9. a) $\mu(y)=y^{-2}$ b) $\Phi(x,y)=\frac{y^2}{2}+\frac{\text{log}\,x}{y}$ c) $\frac{y^2}{2}+\frac{\text{log}\,x}{y}=1$

10. a) $\mu(y)=y$ b) $y(x)=\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+8}}{2}}$ c) $I_{\max}=\mathbb{R}$

11. $y(x)=-\sqrt{\frac{\exp\,(e-x)}{\text{log}\,x}}$, $I_{\max}=]1,\infty[$

12. b) $\mu(xy)=\frac{1}{xy}$ **d)** $P(x)=1-\frac{3}{5}(x-1)+\frac{54}{125}(x-1)^2$

13. a) $x'=kx(1-x)$, $x(0)=x_0$, $x(t)=\frac{x_0e^{rt}}{1+x_0(e^{rt}-1)}$, para $t\in\mathbb{R}$.
b) $P(t)=\frac{KP_0e^{rt}}{K+P_0(e^{rt}-1)}$.