Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2015/2016

Curso: MEAmbi, MEBiol, MEQ

Ficha de Problemas nº 7

Equações Diferenciais Lineares de 1ª ordem

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

(a) $\frac{dy}{dt} = -ye^t$ (b) $\psi' = \psi - t$ (c) $t^2\frac{dy}{dt} + 3ty = \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \quad t < 0$

(d) $\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$ (e) $x\frac{dy}{dx} + 2y = (x-2)e^x$ (f) $t\frac{dy}{dt} + 2y = e^t, \quad t > 0$

(g) $\frac{dy}{dx} - 3y = e^{3x}\operatorname{sen} x$ (h) $\frac{dy}{dx} - y\operatorname{tg} x = 1$ (i) $\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{1}{t} - \operatorname{tg} t\right) + t\cos t$

(j) $(1+y^2)\frac{dx}{dy} = \operatorname{arctg} y - x$

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy

(a) $xy' = 2y + x^3e^x, \ y(1) = 0$ (b) $\frac{dy}{dt} + 4t^3y = t^3, \ y(0) = 1$

(c) $\frac{dy}{dt} + y = \operatorname{sen} t, \ y(\pi) = 1$ (d) $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$

(e) $\cos^2 x\,\frac{dy}{dx} + y - 1 = 0, \ y(0) = 5$ (f) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0, \ y(2) = 2$

(g) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0, \\ x(-1) = 2 \end{cases}$, com $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

3. Há cinco anos, uma pequena vila tinha uma população de 1000 habitantes. Actualmente, essa povoação tem 1052 habitantes. Admitindo que a população cresce proporcionalmente ao seu número, determine o número de habitantes da vila no final dos próximos cinco anos.

4. Determine a intensidade da corrente, $I(t)$, como uma função de t (em segundos), sabendo que I verifica a equação diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \operatorname{sen}(2t)$$

onde R e L são constantes não nulas.

5. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$x^2 \cos y \frac{dy}{dx} = 2x \operatorname{sen} y - 1 \qquad y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Determine a solução geral, na forma implícita, da equação diferencial e resolva o problema.
Sugestão: Efectue a mudança de variável $v = \operatorname{sen} y$.

6. Considere a equação diferencial

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2ty - y^3 = 0$$

(a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-2}$.

(b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

(c) No caso geral, considere a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n$$

onde α e β são funções definidads e contínuas em $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que a mudança de variável $y(t) = (x(t))^{1-n}$ transforma a equação numa equação linear.

7. Resolva os seguintes problemas de valor inicial, envolvendo equações de Bernoulli:

(a) $y' + 3x^2 y = x^2 y^3, \;\; y(0) = 1$ (b) $y' + \dfrac{y}{x} = x\sqrt{y}, \;\; y(1) = 1$

8. Considere a equação de Ricati escalar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2 \tag{1}$$

(a) Mostre que a função $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t)$ é solução da equação de Ricati sse ψ é solução de uma certa equação de Bernoulli.

(b) Determine a solução da equação (1).

9. Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t)$$

onde a e f são funções contínuas em $\mathbb{R}$ que verificam

$$a(t) > c > 0 \quad \forall t \quad , \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

Mostre que quaquer solução da equação diferencial satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

Soluções

1. **(a)** $y(t) = ce^{-e^t}$ **(b)** $\psi(t) = t + 1 + ce^t$ **(c)** $y(t) = \frac{c - \cos t}{t^3}$ **(d)** $y(j) = 2x + ce^{-x}$
   (e) $y(j) = \frac{e^x(x-2)^2 + c}{x^2}$ **(f)** $y(t) = \frac{e^t(t-1)+c}{t^2}$ **(g)** $y(j) = e^{3x}(-\cos x + c)$
   (h) $y(j) = \frac{\operatorname{sen} x + c}{\cos x}$ **(i)** $x(y) = (t + c)t \cos t$
   (j) $x(y) = \operatorname{arctg} y - 1 + ce^{-\operatorname{arctg} y}$ (com $c \in \mathbb{R}$, em todas as alíneas).

2. **(a)** $y(j) = x^2(e^x - e)$ **(b)** $y(t) = \frac{1}{4}(1 + 3e^{-t^4})$ **(c)** $y(t) = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen} t - \cos t + e^{\pi - t}\Big)$
   (d) $y(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}$ **(e)** $y(j) = 1 + 4e^{-\operatorname{tg} x}$ **(f)** $y(j) = \frac{4}{x}$
   (g) $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2+3}{2} & \text{se } t \leq 0 \\ 1 + \frac{e^{-t^2/2}}{2} & \text{se } t > 0 \end{cases}$

3. A população da vila, $P(t)$, satisfaz a equação diferencial é $\frac{dP}{dt} = kP$,
   R.: 1107 habitantes.

4. $I(t) = \frac{1}{4L^2 + R^2}\Big(R \operatorname{sen}(2t) - 2L \cos(2t)\Big) + Ce^{-\frac{R}{L}t}$

5. A solução geral na forma implícita é $\operatorname{sen} y = cx^2 + \frac{1}{3x}$, onde $c \in \mathbb{R}$. A solução do P.V.I. é $y(j) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3x}\right)$, para $x \in]\frac{1}{3}, +\infty[$.

6. **(a)** $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2 + 5ct^5}}$ ou $y(t) = -\sqrt{\frac{5t}{2 + 5ct^5}}$ **(b)** $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2 + 3t^5}}$ e $I_{\text{Max}} = \Big]0, \infty\Big[$

7. **(a)** $y(j) = \sqrt{\frac{3}{1 + 2e^{2x^3}}}$ **(b)** $y(j) = \left(\frac{x^2}{5} + \frac{4}{5\sqrt{x}}\right)^2$

8. **(a)** $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{t} - \varphi - \varphi^2$ é equivalente à equação $\frac{d\psi}{dt} - \Big(\frac{2}{t} + 1\Big)\psi = -\psi^2$
   (b) $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{-t}}{t^2\Big(\int \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt + C\Big)}$