Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2015/2016

Curso: MEAmbi, MEBiol, MEQ

Ficha de Problemas nº 6

Singularidades, resíduos e teorema dos resíduos.

1. Classifique a singularidade z_0 da função $f(z)$

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z - \text{sen}\, z}, \quad z_0 = 0$ (b) $f(z) = \dfrac{\text{sen}\, z}{e^{-z} + z - 1}, \quad z_0 = 0$

(c) $f(z) = \dfrac{1 + \cos z}{z - \pi}, \quad z_0 = \pi$ (d) $f(z) = \dfrac{\text{sh}\, z}{z}, \quad z_0 = 0$

(e) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}, \quad z_0 = 0$ (f) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}, \quad z_0 = -1$

2. Determine e classifique todas as singularidades das seguintes funções:

(a) $f(z) = \dfrac{1}{1 - \text{sen}\, z}$ (b) $f(z) = \cos\left(z^{-1}\right)$ (c) $f(z) = \dfrac{1}{e^{-z} - 1} + z^{-2}$

(d) $f(z) = \tanh(\pi z) + z^4 e^{2/z}$ (e) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{e^{2z} - 1} + (z - 2)e^{1/(z - i\pi)}$

3. Calcule os resíduos da função $f(z)$ nas suas singularidades

(a) $f(z) = \dfrac{\text{cotg}\, z}{z^2 - \pi z/4}$ (b) $f(z) = z^3 e^{1/z}$ (c) $f(z) = \dfrac{\text{ch}\, z}{(z^2 + 1)(z - 3)}$

(d) $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z - i}$ (e) $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{z + 1}$

4. Calcule $\text{Res}\,(f, z_0)$

(a) $f(z) = \dfrac{z^{n-1}}{\text{sen}^n z}, \quad z_0 = 0,\ n = 1, 2, \ldots$ (b) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{(1 - \cos 2z)\text{sen}\, z}, \quad z_0 = 0$

(c) $f(z) = \dfrac{z^{n-2}}{\text{sh}^n z}, \quad z_0 = 0,\ n = 1, 2, \ldots$

5. Calcule os integrais, onde as curvas são percorridas uma vez em sentido directo

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2-6z}\,dz$ (b) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} iz}{z^2-4z+3}\,dz$ (c) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{ze^{1/(z+2)}}\,dz$

(d) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cos(iz)}{z^3}\,dz$ (e) $\displaystyle\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{e^z-1}dz$, γ é o polígono de vértices em ± 1, $-\pi i$ e $3\pi i$

(f) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z/2)}{(z-1)(z+2)}\,dz$ (g) $\displaystyle\oint_{|z|=1} e^{-1/z}\operatorname{sen}\frac{2}{z}\,dz$ (h) $\displaystyle\oint_{|z-i|=5} e^{\frac{z}{z-2}}dz$

6. Determine

$$\oint_{\gamma}(1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}})\,dz$$

em que $\gamma=\{z\in\mathbb{C}:|z|=\frac{3}{2}\}$ percorrida uma vez em sentido directo.

7. Considere a função

$$f(z)=\frac{e^z-1-z-\frac{z^2}{2}}{z^3}+(z-1)e^{\frac{1}{z+1}}$$

(a) Determine e classifique todas as singularidades de f, calculando os respectivos resíduos.

(b) Aproveite o resultado da alínea anterior para calcular:

$$\oint_{|z+1|=\frac{11}{10}} f(z)\,dz$$

8. Para $z\in\mathbb{C}$, considere a função definida por

$$f(z)=\frac{1}{z^3}+\frac{z}{e^{-\pi iz}-1}-\frac{2}{z-\pi}e^{\frac{1}{(z-\pi)^2}}$$

(a) Classifique as singularidades de f e calcule os respectivos resíduos.

(b) Calcule

$$\oint_C f(z)\,dz$$

em que $C=\{z\,:\,|z-\frac{1}{7}|=\pi\}$ é percorrida uma vez em sentido directo.

9. Calcule os seguintes integrais impróprios e trigonométricos

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\operatorname{sen} ax}{x^2+1}\,dx,\ a>0$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3 t}{5-4\cos t}\,dt$ (f) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2p\cos x+p^2}\,dx,\quad 0<p<1$ (g) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos^4 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

10. Seja $f(z)$ uma função analítica no conjunto $A = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$. Observe que a função $F(z) = \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$ possui uma singularidade isolada em $z = 0$. Define-se o **resíduo de f em** ∞ por:

$$\mathrm{Res}(\mathrm{f}, \infty) = -\mathrm{Res}(\mathrm{F(z)}, 0).$$

Mostre que se $\gamma \subset A$ é uma curva simples, fechada, percorrida no sentido directo, que contém os pontos $\{z_1, \ldots, z_n\}$ no seu interior, então:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = -2\pi i \ \mathrm{Res}(\mathrm{f}, \infty).$$

Aproveite o resultado para calcular

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^3 e^{1/z}}{z^3+1} dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido inverso.

11. Seja F uma função inteira tal que

$$f(z) = F\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

tem um pólo. Mostre que $F(z)$ é um polinómio.

Soluções

1. **(a)** pólo de ordem 3 **(b)** pólo de ordem 1 **(c)** removível
(d) removível **(e)** pólo de ordem 4 **(f)** pólo de ordem 1

2. **(a)** $\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,;$ pólos de ordem 2.

(b) $0\,;$ singularidade essencial.

(c) $\begin{cases} 0 & ; \text{ pólo de ordem } 2. \\ 2k\pi i\,,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} & ; \text{ pólos simples.} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 0 & ; \text{ singularidade essencial.} \\ \left(\frac{1}{2}+k\right) i\,,\ k \in \mathbb{Z} & ; \text{ pólos simples.} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2k\pi i\,,\ k \in \mathbb{Z} & ; \text{ singularidades removíveis.} \\ i\pi & ; \text{ singularidade essencial.} \\ (2k+1)\pi i\,,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} & ; \text{ pólos simples.} \end{cases}$

3. **(a)** $\begin{cases} 0 \ \rightarrow \text{ pólo de ordem } 2 & \mathrm{Res}(f,0) = -\frac{16}{\pi^2} \\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \ \rightarrow \text{ pólos de ordem } 1, & \mathrm{Res}(f,k\pi) = \frac{4}{k\pi^2(4k-1)} \\ \frac{\pi}{4} \ \rightarrow \text{ pólo de ordem } 1 & \mathrm{Res}(f,\frac{\pi}{4}) = \frac{4}{\pi} \end{cases}$

(b) $0 \rightarrow$ sing. essencial, Res$(f,0) = \frac{1}{4!}$ **(c)** $\begin{cases} i \ \rightarrow \text{ pólo de ordem } 1, & \mathrm{Res}(f,i) = -\frac{\mathrm{ch}\, i}{2i(i-3)} \\ -i \ \rightarrow \text{ pólo de ordem } 1, & \mathrm{Res}(f,-i) = \frac{\mathrm{ch}\, i}{2i(3-i)} \\ 3 \ \rightarrow \text{ pólo de ordem } 1, & \mathrm{Res}(f,3) = \frac{\mathrm{ch}\, 3}{10} \end{cases}$

(d) $i \ \rightarrow$ pólo de ordem 1, Res$(f,i) = -1$ **(e)** $\begin{cases} -1 \ \rightarrow \text{ pólo de ordem } 1, & \mathrm{Res}(f,-1) = e^{-1} \\ 0 \ \rightarrow \text{ sing. essencial,} & \mathrm{Res}(f,0) = 1 - e^{-1} \end{cases}$

4. **(a)** $z_0 = 0$ é pólo de ordem 1 e Res$\,(f,0) = 1$ **(b)** $z_0 = 0$ é pólo de ordem 1 e Res$\,(f,0) = \frac{1}{4}$ **(c)** $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 0$ é pólo de ordem 2 e Res$\,(f,0) = 0$

5. **(a)** $-\frac{\pi i}{3}$ **(b)** $\pi\mathrm{sh}\,1$ **(c)** 0 **(d)** $i\pi$ **(e)** $\pi i(2 + e^{-2\pi} + e^{2\pi})$ **(f)** $\frac{2\pi i}{3}$
(g) $4\pi i$ **(h)** $4\pi e i$

6. $\frac{38\pi i}{3}$

7. **(a)** $z = 0$ é sing. removível, Res$\,(f,0) = 0$; $z = -1$ é sing. essencial, Res$\,(f,-1) = -\frac{3}{2}$.
(b) $-3\pi i$

8. **(a)** $z = 0$ é pólo de ordem 3, Res$\,(f,0) = 0$; $z = \pi$ é sing. essencial, Res$\,(f,\pi) = -2$;
$z = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ são pólos simples e Res$\,(f,2k) = \frac{2ki}{\pi}$ para $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$;
(b) $-4\pi i$

9. **(a)** $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ **(b)** $\frac{3\pi}{8}$ **(c)** $\frac{\pi}{2e^a}$ **(d)** $\frac{\pi}{e}$ **(e)** $\frac{\pi}{12}$ **(f)** $\frac{2\pi}{1-p^2}$ **(g)** $\frac{\pi(4\sqrt{2}-5)}{2}$

10. $2\pi i$