Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2015/2016

Curso: MEAmbi, MEBiol, MEQ

Ficha de Problemas nº 5

Teorema de Cauchy. Fórmulas integrais de Cauchy. Séries de Taylor. Séries de Laurent

1. Para $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, designa-se por $\gamma(a,r)$ o caminho $\gamma(t) = a + re^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$. Calcule $\displaystyle\oint_{\gamma(a,r)} (z^2+1)^{-1} dz$ para:

(a) $\gamma(1,1)$ (b) $\gamma(i,1)$ (c) $\gamma(-i,1)$ (d) $\gamma(0,2)$ (e) $\gamma(3i,\pi)$

2. Calcule os integrais, considerando as curvas são percorridas uma vez em sentido directo.

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz$ (b) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z \operatorname{senh} z}{(z^2-1)^2} dz$ (c) $\displaystyle\oint_{|z-2|=3} \frac{\cosh e^{i\pi z}}{z^3-4z^2} dz$ (d) $\displaystyle\oint_{|z|=1/2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3} dz$

3. Determine todos os possíveis valores do integral

$$I = \oint_C \frac{z\cos z}{z^2+1} dz$$

onde C é uma qualquer curva de Jordan, seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

4. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere a função $u(x,y) = x^3\lambda^3 - 3xy^2\lambda$.

(a) Determine para que valores de λ a função u é harmónica.

(b) Seja $\lambda = 1$. Determine uma função analítica f tal que $f(1) = 1$ e a parte real de f é u.

(c) Calcule o integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^4}\, dz$$

onde C é a circunferência de centro na origem e raio 1 percorrida uma vez no sentido directo.

5. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira e tal que $f(0) = i$. Calcule

$$\int_0^{2\pi} f(4e^{it}) dt$$

6. Considere o caminho $z : [0, \infty[\to \mathbb{C}$, definido por $z(\theta) = e^{-\theta + i\theta}$ que representa parametricamente a curva γ. Considere ainda $\alpha = \displaystyle\int_\gamma z\, dz$.

(a) Esboce γ. (b) Calcule α usando a definição.

(c) Calcule α usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

(d) Calcule α usando o Teorema de Cauchy para substituir γ por um segmento de recta.

7. (a) *Teorema de Liouville:* Mostre que se f é inteira e limitada então f é constante em $\mathbb{C}$.
Sugestão: Utilize a fórmula integral de Cauchy para mostrar que $f'(z) = 0$.

(b) Mostre que, se f é inteira e existem $M \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que para cada $z \in \mathbb{C}$ se tem $|f(z)| \leq M(1 + |z|^n)$, então f é um polinómio de grau menor ou igual que n.

8. Considere um caminho fechado $z : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ cujo contradomínio γ não contem o complexo a, e a função $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, definida por

$$h(t) = \int_\alpha^t \frac{z'(s)}{z(s) - a} ds$$

(a) Verifique que

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-h(t)}\big(z(t) - a\big)\Big) = 0 \quad , \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$$

(b) Usando o facto do caminho ser fechado, mostre que $e^{h(\beta)} = 1$.

(c) Conclua que o índice de γ relativo a a, que é dado por:

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z - a} dz$$

é um número inteiro.

9. Determine as séries de MacLaurin e seus domínios de validade das seguintes funções:

(a) e^{-z^2} (b) $\dfrac{z^2}{(1+z)^2}$ (c) $\operatorname{sen}\left(z^2/3\right)$ (d) $(1+z)e^{-z}$

(e) $\dfrac{5z-4}{z+2}$ (f) $\dfrac{1}{z^2 - 2z - 3}$ (g) $\dfrac{1}{(1-z^3)^2}$

10. Determine a série de Taylor na vizinhança do ponto z_0, indicando o respectivo domínio de validade:

(a) $\frac{1}{1-z}$, $z_0 = 3$ (b) $\dfrac{1}{z^2 - 5z + 6}$, $z_0 = 1$ (c) $z \cos(z+1)$, $z_0 = -1$

(d) $e^{5z} + \frac{3}{3+5z}$, $z_0 = 2$ (e) $\operatorname{sen} z$, $z_0 = \pi$ (f) $\log z$ (valor principal), $z_0 = i - 1$

11. Considere a função

$$f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen}^2 z}$$

Sem calcular os respectivos coeficientes, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z - 2$.

12. Determine a série de Laurent da função $f(z)$ válida num disco centrado em z_0, excepto no ponto z_0; isto é, válida em $0 < |z - z_0| < R$, para certo $R > 0$. Indique o valor de R.

(a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2}, \quad z_0 = 0$ (b) $f(z) = z^3 e^{1/z}, \quad z_0 = 0$

(c) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}, \quad z_0 = 0$ (d) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z - 2}, \quad z_0 = 2$

13. Determine a série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

válida em

(a) $\{z \ : \ 2 < |z| < 3\}$ (b) $\{z \ : \ 3 < |z| < +\infty\}$

14. Determine a série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$$

válida em

(a) $\{z \ : \ 0 < |z - i| < 2\}$ (b) $\{z \ : \ |z - i| > 2\}$

Aproveite os anteriores desenvolvimentos em série para calcular

(c) $\oint_{|z-i|=1} f(z)\, dz$ (d) $\oint_{|z-i|=3} f(z)\, dz$

onde as curvas são percorridas uma vez em sentido directo.

15. Obtenha o desenvolvimento em série de potências da função

$$f(z) = \cos(\pi z) + \frac{1}{1+z}$$

válido para

(a) $|z - 1| < 2$;
(b) $|z - 1| > 2$.

16. Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{1, 2\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \cos z + \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

(a) Determine a série de Laurent da função f que converge no aberto $\{z : 1 < |z| < 2\}$.
(b) Calcule o integral

$$\int_{|z|=3/2} z^2 f(z)\, dz$$

em que a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

Soluções

1. **(a)** 0 **(b)** π **(c)** $-\pi$ **(d)** 0 **(e)** π

2. **(a)** $-\pi i$ **(b)** 0 **(c)** $\frac{\pi^2}{2}\text{senh}\,1$ **(d)** $\pi^3 i$

3.
$$\begin{cases} 0 & \text{se} \quad i, -i \notin \operatorname{int}\gamma \\ \pm i\pi\cosh 1 & \text{se} \quad i \in \operatorname{int}\gamma\,,\ -i \notin \operatorname{int}\gamma \\ \pm i\pi\cosh 1 & \text{se} \quad -i \in \operatorname{int}\gamma\,,\ i \notin \operatorname{int}\gamma \\ \pm 2i\pi\cosh 1 & \text{se} \quad i, -i \in \operatorname{int}\gamma \end{cases}$$

4. **(a)** $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm 1$ **(b)** $f(z) = f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ **(c)** $2\pi i$

5. $2\pi i$

6. **(a)** Espiral com extremidades em 1 e em 0 **(b)**, **(c)**,**(d)** $-\frac{1}{2}$

9. **(a)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n}$ em $\mathbb{C}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n+1}$ em $|z| < 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}(2n+1)!} z^{4n+2}$ em $\mathbb{C}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{n+1}$ em $\mathbb{C}$

(e) $\displaystyle 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} z^n$ em $|z| < 2$

(f) $\displaystyle \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \Big((-1)^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}\Big) z^n$ em $|z| < 1$ **(g)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^{3n-3}$ em $|z| < 1$

10. **(a)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-3)^n$ em $|z-3| < 2$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big)(z-1)^n$ em $|z-1| < 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z+1)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z+1)^{2n}$ em $z \in \mathbb{C}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{e^{10}}{n!} + \frac{3(-1)^n}{13^{n+1}}\Big) 5^n (z-2)^n$ em $|z-2| < \frac{13}{5}$ **(e)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ em $\mathbb{C}$

(vi) $\displaystyle \frac{1}{2}\log 2 + \frac{3\pi i}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(i-1)^{n+1}}(z-i+1)^{n+1}$ em $|z-i+1| < 1$

11. $\pi - 2$

12. **(a)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}$ para $z \in A(0,0,\infty)$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n+3}}{n!}$ para $z \in A(0,0,\infty)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}z^{2n-2}$ para $z \in A(0,0,\infty)$

(d) $\displaystyle\cos(2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}(z-2)^{2n}+\operatorname{sen}(2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}(z-2)^{2n-1}$ para $z \in A(2,0,\infty)$

13. (a) $\displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{z^{n+1}}$

14. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-3}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^n(2i)^n}{(z-i)^{n+4}}$ **(c)** $\frac{\pi}{2}$ **(d)** 0

15. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n}}{(2n)!}(z-1)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n}}{(2n)!}(z-1)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{(z-1)^{n+1}}$

16. (a) $\displaystyle f(z)=\cdots-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2!}\right)z^2-\frac{z^3}{2^4}-\left(\frac{1}{2^5}-\frac{1}{4!}\right)z^4-\cdots$

(b) $-2\pi\mathrm{i}$