TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2015/2016

Curso: MEAmbi, MEBiol, MEQ

Ficha de Problemas nº 4

Funções holomorfas e funções harmónicas; integral complexo

1. Poderá existir uma função analítica em $\mathbb{C}$ cuja parte real seja $u(x;y) = e^y x + e^x y$?

2. Determine uma harmónica conjugada de cada uma das funções:

(a) $u(x,y) = xy^3 - x^3y + 2x + 1$ (b) $u(x,y) = e^{2x}\cos(2y)$

(c) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ (d) $u(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 2y$

3. Decida se existem, ou não, funções analíticas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfazendo as seguintes condições; em caso afirmativo, determine-as:

(a) $\mathrm{Re}f(x+iy) + \mathrm{Im}f(x+iy) = x^2 - y^2$

(b) $\mathrm{Im}f(x+iy) = 3x^3y + x + \alpha xy^3$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, e satisfazendo $f(i) = 2$.

4. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que se verifica uma das condições

(a) $\mathrm{Re}\, f(z) \equiv (\text{constante})$,

(b) $f'(z) \equiv 0$,

(c) $|f(z)| \equiv (\text{constante})$.

Mostre que $f(z) \equiv (\text{constante})$.

5. Mostre que se f e $\overline{f}$ são ambas inteiras (i.e. diferenciáveis em todo o $\mathbb{C}$), então f é constante.

6. Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e defina $A^* = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \bar{z} \in A\}$. Se f é uma função analítica em A mostre que $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ é uma função analítica em A^*.

7. Determinar

$$\int_\gamma \mathrm{Im}\,(z^2)\, dz$$

sendo γ a curva que une 0 a $2+4i$ ao longo

(i) do segmento de recta; (ii) do eixo real até 2 e depois verticalmente até $2+4i$;

(iii) da parabola $y = x^2$.

8. Calcule o integral $\int_\gamma f(z)\,dz$, onde

(a) $f(z) = e^{|z|^2}\,\mathrm{Re}\,z$, γ é o segmento que une os pontos 0 e $1+i$

(b) $f(z) = z\,\mathrm{Im}\,z^2$, $\gamma = \{z \mid |z| = 1,\ -\pi \leq \arg z \leq 0\}$

(c) $f(z) = z\bar{z}$, $\gamma = \{z \mid |z| = 1\}$ (d) $f(z) = 1/z$, $\gamma(t) = e^{it}$ com $t \in [0, 8\pi]$

(e) $f(z) = e^z$, γ os segmentos $[0,1] \cup [1, 1+i] \cup [1+i, i]$

9. Considere o caminho γ_1 que consiste no segmento de recta unindo o ponto inicial 0 ao ponto $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ e considere também o caminho γ_2 entre esses mesmos pontos dado pela parábola $t \mapsto t + it^2$.

Para cada valor de $k = 1, 2$, calcule, utilizando a defnição, os integrais

$$\int_{\gamma_k} e^z dz \qquad \text{e} \qquad \int_{\gamma_k} \bar{z}^2 dz$$

Comente os resultados obtidos.

10. Calcule o integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz$, onde

(i) $\gamma = \{z \mid |z| = 1\ ,\ \mathrm{Im}\,z \geq 0\}$, e escolha-se o ramo da função $\sqrt{z}$ que verifica $\sqrt{1} = 1$,

(ii) $\gamma = \{z \mid |z| = 1\ ,\ \mathrm{Re}\,z \geq 0\}$, e escolha-se o ramo da função $\sqrt{z}$ que verifica $\sqrt{-i} = (1-i)/\sqrt{2}$.

Em ambos os casos a curva é percorrida em sentido anti-horário.

11. Mostre que

(a) $\left|\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{z}\,dz\right| \leq 4\pi$ (b) $\left|\oint_{|z|=R} \frac{z-1}{z+1} dz\right| \leq 2\pi \frac{R(R+1)}{R-1}$ para $R > 1$

(c) $\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^4} dz\right| \leq \pi\, R^{-3}$ em que $\gamma(t) = Re^{it}$ e $t \in [0, \pi]$

12. Seja

$$f(z) = z^{-1+i} = \exp\left[(-1+i)\log z\right] \quad , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

onde

$$\log z = \log|z| + \mathrm{i}\arg z \quad \text{para}\ \ 0 \leq \arg z < 2\pi \quad (\text{o ramo} - 0 \text{ do logaritmo}).$$

Calcule

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido positivo.

13. Determine

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos\frac{1}{z}}{z^2}dz$ em que γ é qualquer curva regular e simples unindo os pontos i a $\frac{1}{\pi}$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ em que $\gamma = \{z(t) = \cos t + i\,\text{sen}\, t \;:\; t \in [0, \frac{3\pi}{2}]\}$ percorrida em sentido anti-horário.

14. Considere a função $u(x,y) = x\alpha(y) + e^{-3y}\cos(3x)$, onde $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2.

(a) Determine todas as funções $\alpha(y)$ tais que u é a parte real de uma função analítica $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(b) Considerando $\alpha(y) = 2y+1$, determine a função analítica $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}\,(f) = u$ e $f(0) = 1+i$.

(c) Sendo f a função determinada na alínea anterior, calcule $\int_\gamma f'(z)dz$ onde γ é o caminho parametrizado por $\gamma(t) = t + i\,\text{sen}\, t$, com $0 \leq t \leq \pi$.

Soluções

1. Não

2. (a) $v(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{4} - \dfrac{3x^2y^2}{2} + 2y + c$, $c \in \mathbb{R}$ (b) $v(x,y) = e^{2x}\text{sen}\,(2y) + c$, $c \in \mathbb{R}$

   (c) $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} + c$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $c \in \mathbb{R}$

   (d) $v(x,y) = \text{arctg}\,\dfrac{y}{x} - 2x + c$ para $x > 0$, $c \in \mathbb{R}$

3. (a) $f(x+iy) = \frac{x^2-y^2}{2} - xy + c + i(\frac{x^2-y^2}{2} + xy - c)$
   (b) Existe para $\alpha = -3$; nesse caso:
   $f(x+iy) = \frac{3}{4}(x^4+y^4) - \frac{9}{2}x^2y^2 - y + \frac{9}{4} + i(3x^3y + x - 3xy^3)$.

7. **(i)** $\frac{16}{3}(2+4i)$ **(ii)** $32i$ **(iii)** $8 + \frac{128}{5}i$

8. **(a)** $\frac{1+i}{4}(e^2-1)$ **(b)** $-\frac{\pi}{2}$ **(c)** 0 **(d)** $8i\pi$ **(e)** $\cos 1 - 1 + i\,\text{sen}\,1$

9. $\int_{\gamma_1} e^z = \int_{\gamma_2} e^z = e^{1+i} - 1$ e $\int_{\gamma_1} \bar{z}^2 = \frac{2}{3}(1-i)$, $\int_{\gamma_2} \bar{z}^2 = \frac{14}{15} - \frac{i}{3}$

10. **(i)** $2(i-1)$ **(ii)** $2i\sqrt{2}$

12. $i(1-e^{-2\pi})$

13. **(a)** $-i\,\text{sh}\,1$ **(b)** $\frac{3\pi i}{2}$

14. **(a)** $\alpha(y) = ay + b$, $a, b \in \mathbb{R}$
    (b) $f(x+iy) = x(2y+1) + e^{-3y}\cos(3x) + i(y^2 + y - x^2 + e^{-3y}\text{sen}\,(3x) + 1)$
    (c) $\pi - 2 - i\pi^2$