Análise Complexa e Equações Diferenciais

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2015/2016

Curso: MEAmbi, MEBiol, MEQ

Ficha de Problemas nº 3

Funções elementares, limites, continuidade, derivada complexa e equações de Cauchy-Riemann

1. Escreva na forma $a + bi$ os seguintes números complexos:

(a) $2e^{4\pi i/3}$ (b) $e^{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}i}$ (c) $\cos(\pi + i)$ (d) $\operatorname{sh}\dfrac{i\pi}{2}$

2. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z,\, w \in \mathbb{C}$):

(a) $\cos(iz) = \cosh(z)$ (b) $\operatorname{sen}(iz) = i\operatorname{senh} z$ (c) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$

(d) $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$ (e) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$

3. Calcule o valor principal (i.e., tomando na função $\log z$ o ângulo correspondente à restrição principal) de:

(a) $\log(-e)$ (b) $\log(-i)$ (c) $\log(1 - i)$

(d) 2^{-i} (e) i^i (f) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$

4. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{C}$:

(a) $\operatorname{senh}(iz) = -i$ (b) $\log(i - z) = 1$ (c) $e^z = -1$ (d) $\operatorname{sen} z = 3i$

(e) $\log z = (2 - \frac{i}{2})\pi$ (f) $e^{iz} + e^{-iz} + 2 = 0$ (g) $\overline{e^{iz}} = e^{i\overline{z}}$

5. Para uma função f, define-se

$$Z(f) = \{z \in \mathbb{C} \quad : \quad f(z) = 0\}$$

Determine o conjunto $Z(f)$ para cada uma das funções

(a) $(z^4 - 1)\operatorname{sen}(\pi z)$ (b) $\cosh^2 z$ (c) $1 + e^{2z}$

(d) $\operatorname{sen}^2\Big(1/z\Big) \quad (z \neq 0)$ (v) $1 - e^{z^2}$ (vi) $1 + e^{z^2}$

6. Indique o domínio das seguintes funções complexas de variável complexa:

(a) $f(z) = \dfrac{z}{z+3i}$ (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2}$

(c) $f(z) = f(x+iy) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + ixy$ (d) $f(z) = f(x+iy) = \log x + (x-2y)i$

7. Determine a parte real e a parte imaginária de cada uma das funções:

(a) $\overline{z} + iz^2$ (b) $i - z^3$ (c) $\overline{z}/z$ (d) $\operatorname{sen} z$

8. Esboçe a imagem pela aplicação f do conjunto A indicado:

(a) $f(z) = z^2, \quad A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Arg} z = \alpha\}$ com $\alpha \in [0, \pi]$

(b) $f(z) = (z-i)^{-1}, \quad A = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 2\}$

(c) $f(z) = e^z \quad A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \text{const.}\}$

(d) $f(z) = \log z \quad A = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < e \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} z < \frac{7\pi}{4}\}$ utilizando o valor principal do logaritmo.

(e) $f(z) = \frac{1}{z} \quad A = \{z \in \mathbb{C} : z + \overline{z} = 2\}$

9. Determine, ou mostre que não existe, cada um dos seguintes limites

(a) $\displaystyle\lim_{z\to -i} \frac{z^2+3iz-2}{z+i}$ (b) $\displaystyle\lim_{z\to -1+2i} \Big(3xy + i(x-y^2)\Big)$ (c) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{|z|}$

(d) $\displaystyle\lim_{z\to 1+i} \frac{z^2-5}{iz}$ (e) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$ (f) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^2$

10. Mostre que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2}{|z|^2} & \text{se} \quad z \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{se} \quad z = 0 \end{cases}$$

não é contínua em $z = 0$.

11. Dado um número real $a \in [-1, 1]$, mostre que as equações $\operatorname{sen} z = a$ e $\cos z = a$, onde $z \in \mathbb{C}$, têm apenas soluções reais. Determine essas soluções nos casos

$$(a) \quad a = 0 \qquad\qquad (b) \quad a = -\sqrt{2}/2$$

12. Determine o domínio de diferenciabilidade de cada uma das seguintes funções e calcule a derivada nesse domínio.

(a) $f(z) = z^2\bar{z}$ (b) $f(x+iy) = xy - ix$ (c) $f(z) = \cos(3z) - i$

(d) $f(z) = |z|\bar{z}$ (e) $f(x+iy) = x^2 - y + i(x - y^2)$

(f) $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$ (g) $f(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z$ (h) $f(z) = e^{\bar{z}}$

13. Indique o domínio de analiticidade das funções do exercício anterior.

14. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2i|xy|$.

(a) Estude a analiticidade de $f(z)$.

(b) Calcule $f'(z)$ nos pontos onde f é analítica.

15. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & \text{se} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad z = 0 \end{cases}$$

Mostre que f verifica as condições de Cauchy-Riemann no ponto $z = 0$, mas não admite derivada nesse ponto.

16. Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $\operatorname{sen}(z) + 3z^2 - ze^{z^3}$ (b) $\cos(z) + (2z+1)^z$ (c) $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

(d) $\log(z^2 + iz)$ (valor principal)

Soluções

1. **(a)** $-(1+i\sqrt{3})$ **(b)** $\frac{\sqrt{2e}}{2}(1-i)$ **(c)** $-\cosh 1$ **(d)** i

2.

3. **(a)** $1+i\pi$ **(b)** $-\frac{i\pi}{2}$ **(c)** $\frac{\log 2}{2}-\frac{i\pi}{4}$ **(d)** $\cos(\log 2) - i\,\mathrm{sen}\,(\log 2)$ **(e)** $e^{-\pi/2}$
(f) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}(1+i)$

4. **(a)** $\frac{\pi}{2}(-1+4k)$, $k\in\mathbb{Z}$ **(b)** $-e+i$ **(c)** $(2k+1)i\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
(d) $(2k+1)\pi - i\log(3+\sqrt{10}),\ 2k\pi - i\log(-3+\sqrt{10}),\ k\in\mathbb{Z}$ **(e)** $-e^{2\pi}i$
(f) $(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$ **(g)** $k\pi, k\in\mathbb{Z}$

5. **(a)** $z\in\{\pm i\}\cup\{k\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$ **(b)** $z\in\{\frac{\pi}{2}(1+2k)i\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$
(c) $z\in\{\frac{\pi}{2}(1+2k)i\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$ **(d)** $z\in\left\{\frac{1}{k\pi}\ :\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$
(e) $z\in\{\pm\sqrt{n\pi}(1+i)\ :\ n\in\mathbb{N}_0\}\cup\{\pm\sqrt{n\pi}(1-i)\ :\ n\in\mathbb{N}\}$
(f) $z\in\left\{\pm\sqrt{\pi\big(n+\frac{1}{2}\big)}(1+i)\ :\ k\in\mathbb{N}_0\right\}\cup\left\{\pm\sqrt{\pi\big(n-\frac{1}{2}\big)}(1-i)\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}$

6. **(a)** $\mathbb{C}\setminus\{-3i\}$ **(b)** $\mathbb{C}\setminus\{i\sqrt{2},-i\sqrt{2}\}$ **(c)** $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ **(d)** $\{z\in\mathbb{C}\ :\ \mathrm{Re}\,z>0\}$

7. **(a)** $\begin{cases}\mathrm{Re}\,f(x,y)=x-2xy\\ \mathrm{Im}\,f(x,y)=x^2-y^2-y\end{cases}$ **(b)** $\begin{cases}\mathrm{Re}\,f(x,y)=3xy^2-x^3\\ \mathrm{Im}\,f(x,y)=1-3x^2y+y^3\end{cases}$
(c) $\begin{cases}\mathrm{Re}\,f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\\ \\ \mathrm{Im}\,f(x,y)=\frac{-2xy}{x^2+y^2}\end{cases}$ **(d)** $\begin{cases}\mathrm{Re}\,f(x,y)=\mathrm{sen}\,x\cosh y\\ \mathrm{Im}\,f(x,y)=\cos x\,\mathrm{senh}\,y\end{cases}$

8. **(a)** $f(A)=\{z\in\mathbb{C}\ :\ \mathrm{Arg}\,z=2\alpha\}$ **(b)** $f(A)=\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z|=\frac{1}{2}\}$
(c) $f(A)=\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z|=e^c\}$
(d) $f(A)=\{z\in\mathbb{C}\ :\ \mathrm{Re}\,f\in]\log 2,1[\ \mathrm{e}\ \mathrm{Im}\,f\in]-\pi,\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4},\pi]\}$
(e) $f(A)=\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}\}$

9. **(a)** i **(b)** $-6-5i$. **(c)** não existe **(d)** $\frac{7}{2}+\frac{3}{2}i$ **(e)** não existe **(f)** não existe

10.

11. Sugestão: estude a parte imaginária das soluções.

Nas questões seguintes denota-se o domínio de diferenciabilidade por D_{dif} e o domínio de analiticidade por D_{an}.

12 e 13. (a) $D_{\text{dif}} = \{0\}$; $f'(0) = 0$; $D_{\text{an}} = \emptyset$ (b) $D_{\text{dif}} = \{1\}$; $f'(1) = -\mathrm{i}$; $D_{\text{an}} = \emptyset$

(c) $D_{\text{dif}} = \mathbb{C}$; $f'(z) = -3\text{sen}\,(3z)$; $D_{\text{an}} = \mathbb{C}$ (d) $D_{\text{dif}} = \{0\}$; $f'(0) = 0$; $D_{\text{an}} = \emptyset$

(e) $D_{\text{dif}} = \{x - ix \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\}$; $f'(x - ix) = 2x + \mathrm{i}$, para $x \in \mathbb{R}$; $D_{\text{an}} = \emptyset$

(f) $D_{\text{dif}} = \emptyset$; $D_{\text{an}} = \emptyset$ (g) $D_{\text{dif}} = \{0\}$; $f'(0) = 0$; $D_{\text{an}} = \emptyset$

(h) $D_{\text{dif}} = \emptyset$; $D_{\text{an}} = \emptyset$

14. $D_{\text{an}} = \{x + iy \in \mathbb{C} : xy > 0\}$; para $z \in D_{\text{an}}$, $f'(z) = 2z$.

15. Calculando as derivadas parciais pela definição, obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 1 \ , \ \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 1$$

Por outro lado, utilizando a representação em coordenadas polares $h = |h|e^{i\theta}$

$$\lim_{\substack{|h|\to 0 \\ \theta=\alpha}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = e^{4i\alpha}$$

16. (a) $\cos(z) + 6z - (1 + 3z^3)e^{z^3}$

(b) $-\text{sen}\,(z) + \left(\log(2z+1) + \frac{2z}{2z+1}\right)(2z+1)^z$ em $\mathbb{C} \setminus \{x + 0i \ : \ x \leq -\frac{1}{2}\}$

(c) $\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ (d) $f(z) = \frac{2z+i}{z^2+iz}$ em $\mathbb{C} \setminus \{iy \ : \ y \geq 0 \text{ ou } y \leq -1\}$