Análise Complexa e Equações Diferenciais
2º Semestre 2015/2016
Cursos: MEBiol, MEAmbi, MEQ

Ficha de Problemas nº 2
Séries numéricas, séries de potências

1. Determine, ou mostre que não existem, os limites das sucessões:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2\mathrm{i}}{7+3n\mathrm{i}}$ (c) $\lim_{n\to\infty} (1+\mathrm{i})^{-n}$ (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\mathrm{i}}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+3n}{5n^2} + \mathrm{i}\frac{-6n+n^2}{5n^2}\right)$ (f) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n\mathrm{i}} - e^{-n\mathrm{i}}}{n}$ (g) $\lim_{n\to\infty} e^{\mathrm{i}n}$

2. Considere a sucessão definida para cada $n \in \mathbb{N}$ por

$$z_n = \frac{n}{2\mathrm{i}n+1} + \frac{e^{\mathrm{i}\cos(25\pi n^5)\log n^2}}{n^3}$$

Mostre que a sucessão é limitada e convergente. Calcule $\lim_{n\to\infty} z_n$.

3. Calcule a soma das seguintes séries.

a) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (2+\mathrm{i})^{-n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (3\mathrm{i})^{-5n+1}$

4. Escreva uma expressão da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ para as seguintes funções:

(a) $\frac{1}{2z+5}$ (b) $\frac{1}{z^4+1}$ (c) $\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$ (d) $\frac{1}{1-z+z^2}$

(e) $\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ (f) $\frac{1}{(z^2-1)(z^2-9)}$

Em cada caso, indique o conjunto onde a expressão obtida é válida.

5. Escreva uma expressão para **(i)** $(1-z)^{-1}$ e **(ii)** $1/(z(z+2))$ como potências de **(a)** $z+1$ e **(b)** $z-\mathrm{i}$.

6. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{5n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{\mathrm{i}n} z^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(\mathrm{i}n)^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

7. Determine para quais valores de z, as seguintes séries convergem absolutamente

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{z}\right)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(z^n+z^{-n})$

8. Se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência R, determine os raios de convergência das séries:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^5 z^n \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+3}$$

9. A função ζ de Riemann é definida pela fórmula:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Mostre que a série que define a função ζ é absolutamente convergente para $\operatorname{Re} z > 1$.

Soluções

1. (a) 0 (b) $-\frac{\mathrm{i}}{3}$ (c) 0 (d) 1 (e) $\frac{2+\mathrm{i}}{5}$ (f) 0 (g) Não existe

2. $|z_n| < \frac{1}{2}$; $\lim_{n\to\infty} z_n = -\frac{\mathrm{i}}{2}$

3. a) $\frac{1-2\mathrm{i}}{20}$ b) $\frac{1-\mathrm{i}}{2}$ c) $\frac{3\mathrm{i}}{3^5\mathrm{i}-1}$

4. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{5^{n+1}} z^n$ em $|z| < \frac{5}{2}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{4n}$ em $|z| < 1$

(c) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\mathrm{i}^n z^n$ em $|z| < 1$ (d) $\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{n+1}-(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{n+1}}{2^{n+1}} z^n$ em $|z| < 1$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(-1)^n z^n$ em $|z| < 1$ (f) $\frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3^{2n+2}}\right) z^{2n}$ em $|z| < 1$

5. (i) (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$ válido em $|z+1| < 2$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n+1}}$ válido em $|z-\mathrm{i}| < \sqrt{2}$

(ii) (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}-1}{2}(z+1)^n$ válido em $|z+1| < 1$

(b) $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{i}^{n+1}} - \frac{1}{(2+\mathrm{i})^{n+1}}\right)(-1)^n (z-\mathrm{i})^n$ válido em $|z-\mathrm{i}| < 1$

6. (a) 1 (b) 1 (c) 1 (d) ∞ (e) 0

7. (a) $|z+1| < 2$ (b) $\operatorname{Re} z > 0$ (c) $\operatorname{Re} z < -\frac{1}{2}$ (d) $|z| = 1$

8. a) R^5 b) $\sqrt{R}$