Análise Complexa e Equações Diferenciais

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2015/2016

Curso: MEAmbi, MEBiol, MEQ

Ficha de Problemas nº 12

Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

2. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida em pontos adequados, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

4. Determine a série de Fourier da função definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ por

$$j(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Indique a soma da série para $x \in [-\pi, \pi]$.

5. Determine a série de Fourier da função definida no intervalo $[-2, 2]$ por

$$l(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Indique a soma da série para $x \in [-2, 2]$.

6. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \operatorname{sen} x > 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{sen} x \leqslant 0 \end{cases}$$

7. Desenvolva a função definida no intervalo $[0,1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

8. Determine a série de cosenos da função $r(x) = x$ no intervalo $[0,\pi]$, indicando a soma da série em $\mathbb{R}$.

9. Considere a função $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(a) Esboçe o gráfico da extensão par de f ao intervalo $[-2,2]$ e obtenha o desenvolvimento em série de cosenos de f nesse intervalo, indicando a respectiva soma da série.

(b) Esboçe o gráfico da extensão ímpar de f ao intervalo $[-2,2]$ e obtenha o desenvolvimento em série de senos de f nesse intervalo, indicando a respectiva soma da série.

10. Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine:

(i) a série de Fourier associada a f;

(ii) a série de senos associada a f;

(iii) a série de cosenos associada a f.

11. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \ x \in (0,\pi), \ \text{com} \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \text{sen}\,(x) - 2\ \text{sen}\,(5x). \end{cases}$$

12. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \ x \in (0,L), \ \text{com} \begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos\,(3\pi x/L). \end{cases}$$

13. Resolva o seguinte problema de valores de fronteira e inicial para $0 < x < \pi$ e $t > 0$

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad \text{com} \quad \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \text{sen}\,(x) + 3\text{sen}\,(3x) \end{cases}$$

14. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,\pi]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,\pi[$).

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = (\pi - x)x \ .$$

15. Seja f a função definida no intervalo $]0, 2\pi[$ por $f(x) = x$.

(a) Determine a série de cosenos da função f.

(b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \ x \in (0, 2\pi) \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

16. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } \ x \in]0,1[\\ u(0,t) = 0 & \text{se } \ t > 0 \\ u(1,t) = \mathsf{sen}\, 1 & \text{se } \ t > 0 \end{cases}$$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = 3\mathsf{sen}\,(2\pi x) - 7\mathsf{sen}\,(4\pi x) + \mathsf{sen}\,(x) \ .$$

17. Considere a equação de propagação do calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $\quad (*)$

(a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.

(b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0,t) = T_1, \ u(L,t) = T_2$.

(c) Resolva a equação $(*)$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e para as condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(0,t) = 20 \\ u(1,t) = 60 \\ u(x,0) = 75. \end{cases}$$

18. Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\cos t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o problema de valor inicial e fronteira, para a equação dada, com as condições

$$\begin{cases} u(t,0) = 0 & t > 0, \\ u(t,\pi) = 0 & t > 0, \\ u(0,x) = \mathsf{sen}\, x + 2\,\mathsf{sen}\, x \cos x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

19. Seja a função f definida no intervalo $(0, \pi)$ por $f(x) = \text{sen}\,(x)$.

(a) Determine a série de Fourier de cosenos da função f.

(b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alÃnea anterior para cada x no intervalo $[-\pi, \pi]$.

(c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \; x \in \,]0, \pi[\\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

20. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \\ u(0,x) = 0 \; , \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$, (satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,1[$) e onde c é uma constante real positiva.

21. Considere o seguinte problema de valores na fronteira, para $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \;\; , \;\; u(x,1) = f(x) \end{cases} \tag{1}$$

sendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \;\; 0 \leq x \leq 1/2, \\ -1 & \text{se} \;\; 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Determine a série de cosenos da função f no intervalo $[0,1]$ e indique para que valores converge a série.

(b) Resolva o problema (1).

22. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \;\; , \;\; x, y \in [0,1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \;\; , \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos\,(2\pi x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \;\; , \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos\,(2\pi y)$$

23. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0,t) = x \ , \quad u(x,1,t) = x \\ u(0,y,t) = 0 \ , \quad u(1,y,t) = 1 \\ u(x,y,0) = x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \cos\left(2\pi\left(x-y\right)\right) - \cos\left(2\pi\left(x+y\right)\right) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$.

Soluções

1. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\text{sen}\,((2n+1)\pi x)}{2n+1}$

2. $\frac{L}{2}+\frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x=0$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3. $\frac{L^2}{3}+\frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x=L$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$;
fazendo $x=0$, obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

4. $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2\pi}\big((-1)^n-1\big)\cos(nx)+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sen}\,(nx)\right]=\begin{cases} j(x) & \text{se} \quad -\pi<x<\pi \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x=\pm\pi\end{cases}$

5. $\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\right]=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2\le x<0 \\ 1 & \text{se} \quad 0\le x<1 \\ 0 & \text{se} \quad 1<x\le 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x=0 \text{ ou } x=1\end{cases}$

6. $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\text{sen}\,x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos(2nx)$

7. $$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\,\text{sen}\,\big((2n-1)\pi x\big)=\begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0<x<1 \\ 0 & \text{se} \quad x=0 \text{ ou } x=1\end{cases}$$

8. $SF_{\cos}r(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)\cos(nx)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\cos\big((2n-1)x\big)=$
$=\begin{cases} x-2k\pi & \text{se} \quad 2k\pi\le x\le(2k+1)\pi \\ 2k\pi-x & \text{se} \quad (2k-1)\pi<x<2k\pi\end{cases}$ para $k\in\mathbb{Z}$.

9. (a) $SF_{\cos}f(x)=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\left((1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{2}{n\pi}\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right]\cos\frac{n\pi x}{2}=$
$=\begin{cases} 1-x & \text{se} \quad 0\le x<1 \\ 1 & \text{se} \quad 1<x\le 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x=1\end{cases}$.

(b) $SF_{\text{sen}}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi}\left((1-(-1)^n+\cos\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{4}{n^2\pi^2}\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right]\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}=$
$=\begin{cases} 1-x & \text{se} \quad 0<x<1 \\ 1 & \text{se} \quad 1<x<2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x=1 \\ 0 & \text{se} \quad x=0 \text{ ou } x=2\end{cases}$.

10. (i) $\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,(2n\pi x)}{n\pi}$ (ii) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\text{sen}\,(n\pi x)$
(iii) $\frac{1}{2}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\big((2n-1)\pi x\big)$

11. $e^{-\alpha^2 t}\text{sen}\,(x)-2e^{-25\alpha^2 t}\text{sen}\,(5x)$

12. $e^{-\left(1-\frac{9\pi^2}{L^2}\right)t}\cos\frac{3\pi x}{L}$

13. $u(x,t) = \text{sen}\,(t)\text{sen}\,(x) + \text{sen}\,(3t)\text{sen}\,(3x)$

14. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-(1+n^2)t}\,\text{sen}\,(nx)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}\, e^{-(1+n^2)t}\,\text{sen}\,(nx) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\left(1+(2n+1)^2\right)t}}{(2n+1)^3}\,\text{sen}\,((2n+1)x)$

15. (a) $\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi}\cos\left(\frac{n}{2}x\right) = \pi - \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$

(b) $\pi e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\, e^{-\frac{n^2t+2t^2}{4}}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$

16. (a) $\text{sen}\, x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(1-n^2\pi^2)\,t}\text{sen}\,(n\pi x)$, onde $A_n \in \mathbb{R}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\text{sen}\, x + 3e^{(1-4\pi^2)t}\text{sen}\,(2\pi x) - 7e^{(1-16\pi^2)\,t}\text{sen}\,(4\pi x)$

17. (b) $u(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$

(c) $20 + 40x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n\pi}\left(11 - 3(-1)^n\right)e^{-n^2\pi^2\alpha t}\text{sen}\,(n\pi x)$

18. $u(t,x) = e^{-\text{sen}\, t}\text{sen}\,(x) + e^{-4\text{sen}\, t}\text{sen}\,(2x)$

19. (a) $\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\cos\,(nx) = \frac{2}{\pi}\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}\cos\,(2nx)\right)$

(b) $|\text{sen}\, x|$ (c) $\frac{2}{\pi}e^{2t} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2e^{(2-n^2)t}}{4n^2-1}\cos\,(2nx)$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2 c}\text{sen}\,(n\pi ct)\text{sen}\,(n\pi x)$

21. (a) $$SF_{\cos} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n\pi}\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\,(n\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{se}\;\; 0 \le x < 1/2, \\ 0 & \text{se}\;\; x = 1/2 \\ -1 & \text{se}\;\; 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

(b) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n\pi}\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\,(n\pi x)\text{sh}\,(n\pi y)$

22. $C + \frac{\text{ch}\,(2\pi x)\cos\,(2\pi y) + \text{ch}\,(2\pi y)\cos\,(2\pi x)}{2\pi\,\text{sh}\,(2\pi)}$, $C \in \mathbb{R}$

(b) $\pi e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\, e^{-\frac{n^2t+2t^2}{4}}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$

23. $u(x,y,t) = x + \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\,\text{sen}\,(2\pi x)\,\text{sen}\,(2\pi y)\,\text{sen}\,(2\sqrt{2}\pi t)$