TÉCNICO LISBOA

# Análise Complexa e Equações Diferenciais
## $2^{\underline{o}}$ Semestre 2015/2016
**Curso:** MEAmbi, MEBiol, MEQ

## Ficha de Problemas nº 11
### Exponencial de Matriz. Equações Vectoriais de 1ª Ordem, Equações de ordem $n$ - caso não homogéneo

**1.** Para cada uma das seguintes matrizes determine $e^{At}$:

(a) $A = 0$ (b) $A = I$ (c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ (g) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(h) $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (i) $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (j) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

**2.** Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + e^{2t} \\ y' = -8y + 8 \end{cases} , \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**3.** Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**(a)** Calcule $e^{At}$.

**(b)** Determine a solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = (0, 1, 1) \end{cases}$$

onde $\mathbf{b}(t) = (0, e^{t\sqrt{2}}, e^{-t})$

**4.** Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = (0,0,0,0) \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

**(a)** Determine a solução geral da equação homogénea associada.

**(b)** Resolva o problema.

**5.** Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2 \\ \dot{y} = 3x - y + 2 \\ \dot{z} = ty - tz \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = y(0) = -z(0) = -1$.

**Sugestão:** note que as primeiras duas equações não mencionam $z$.

(

**6.** Sejam $A$ e $B$ duas matrizes $n \times n$ de componentes reais ou complexas. Mostre que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$. Aproveite o resultado para calcular:

$$\exp\left( t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

**Sugestão:** mostre que $X(t) = e^{-At}e^{(A+B)t}$ satisfaz $\dot{X} = BX$, $X(0) = I$.

**7.** Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a) $y'' - 2y' - 3y = \cos t$ (b) $y'' - 2y' + y = te^t$

(c) $y^{(4)} + y = t + e^{2t}\operatorname{sen} t$ (d) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = t$

(e) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$ (f) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^t)$

**8.** Determine a solução do problema de valor inicial

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + y' - 3 = b(t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 1$$

quando:

(a) $b(t) = 0$ (b) $b(t) = t$ (c) $b(t) = e^{-t}$

**9.** Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos x}$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

**10.** Considere a equação

$$y^{(4)} - 3y^{(3)} + 2y^{(2)} = t + \operatorname{sen} t \tag{1}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (1).

(b) Determine uma solução particular de (1).

(c) Determine a solução de (1) que verifica a condição inicial

$$y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

**11.** Considere a equação que descreve um sistema mola-amortecedor:

$$y'' + 2by' + ky = F(t) \ , \tag{2}$$

onde $2b > 0$ é o coeficiente de atrito do amortecedor, $k > 0$ é o coeficiente de elasticidade da mola e a função contínua $F(t)$ representa a força exterior aplicada ao sistema. Seja $\omega_0 = \sqrt{|b^2 - k|}$.

a) Escreva a solução geral da equação homogénea associada a (2). Será conveniente escrevê-la em função dos parâmetros $b$ e $\omega_0$.

b) Escreva uma equação vectorial da forma $\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y} + \mathbf{h}(t)$ que seja equivalente a (2). Verifique que os valores próprios da matriz $A$ são as raízes do polinómio característico da equação homogénea associada a (2).

c) Resolva a equação não homogénea no caso $b = 0$ e $F(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, onde $F_0 > 0$ (oscilações forçadas). Será conveniente tratar separadamente os casos $\omega \neq \omega_0$ (sem ressonância) e $\omega = \omega_0$ (com ressonância).

**12.** Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{t}{1-t}y' + \frac{1}{t-1}y = 1 - \frac{1}{t}$$

(a) Determine soluções da equação homogénea associada da forma $y(t) = t^k$ e da forma $y(t) = e^{\lambda t}$, e aproveite os resultados para escrever a solução geral da equação homogénea.

(b) Calcule a solução da equação que verifica as condições iniciais $y(2) = 1$ e $y'(2) = -1$.

## Soluções

1. (a) $e^{At} = I$ (b) $e^{At} = e^t I$ (c) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\pi t} \end{bmatrix}$

(d) $e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & -3e^{4t} + 3e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & -e^{4t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$ (e) $e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1-6t & 12t \\ -3t & 1+6t \end{bmatrix}$ (g) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

(h) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\pi t} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5}te^{\pi t} & e^{\pi t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & \sqrt{2}te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$ (i) $e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(4t) & -\text{sen}\,(4t) \\ \text{sen}\,(4t) & \cos(4t) \end{bmatrix}$

(j) $e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(2t) + \text{sen}\,(2t) & 2\text{sen}\,(2t) \\ \text{sen}\,(2t) & \cos(2t) - \text{sen}\,(2t) \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + (t + \frac{1}{2})e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}$

3. (a) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t} & 2te^{\sqrt{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t}(t^2 + 2t) \\ e^{\sqrt{2}t}(t+1) \\ e^{-t}(t+1) \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \frac{e^{-2t}}{\pi}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\text{sen}\,((\pi t) \\ 1 - \cos(\pi t) \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 + 2e^{t^2/2} \end{bmatrix}$

7. (a) $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{10}\Big(\text{sen}\, t + 2\cos t\Big)$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(b) $y(t) = \Big(c_1 + c_2 t + \frac{t^3}{6}\Big)e^t$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(c) $y(t) = \cos(\sqrt{2}t/2)\Big(c_1 e^{\sqrt{2}t/2} + c_2 e^{-\sqrt{2}t/2}\Big) + \text{sen}\,(\sqrt{2}t/2)\Big(c_3 e^{\sqrt{2}t/2} + c_4 e^{-\sqrt{2}t/2}\Big) + t - \frac{e^{2t}}{102}\Big(\text{sen}\, t + 4\cos t\Big)$ com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

(d) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} - \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{12}t^3$ com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(e) $y(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + e^t\Big(t\log t - t\Big)$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(f) $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} - e^{-2t}\text{sen}\,(e^t)$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

8. (a) $y(t)=-5+5e^{-t}+2te^{-t}+3t$ (b) $y(t)=-2+2e^{-t}+te^{-t}+\frac{t^2}{2}+t$
   (c) $y(t)=-6+6e^{-t}+3te^{-t}+3t+\frac{t^2e^{-t}}{2}$

9. $y(x)=e^x\Big(\cos x-\text{sen}\, x+\cos x\log(\cos x)+x\,\text{sen}\, x\Big)$

10. (a) $y_H(t)=c_1+c_2t+c_3e^t+c_4e^{2t}$, com $c_1$, $c_2$, $c_3$ e $c_4\in\mathbb{R}$
    (b) $y_p(t)=\frac{3t^2}{8}+\frac{t^3}{12}-\frac{\text{sen}\, t+3\cos t}{10}$ (c) $y(t)=\frac{9}{80}+\frac{t}{40}-\frac{9}{80}e^t+\frac{3}{10}e^{2t}+\frac{3t^2}{8}+\frac{t^3}{12}-\frac{\text{sen}\, t+3\cos t}{10}$

11. (a)$y_H(t)=\begin{cases} e^{-bt}(c_1e^{\omega_0 t}+c_2e^{-\omega_0 t}) & \text{se} \quad b^2>k\\ e^{-bt}(c_1+c_2t) & \text{se} \quad b^2=k\\ e^{-bt}(c_1\cos(\omega_0 t)+c_2\text{sen}\,(\omega_0 t)) & \text{se} \quad b^2<k\end{cases}$

    (b) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -k & -2b\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0\\ F(t)\end{bmatrix}$

    (c) $y(t)=\begin{cases} c_1\cos(\omega_0 t)+c_2\text{sen}\,(\omega_0 t)+\frac{F_0}{\omega_0^2-\omega^2}\text{sen}\,(\omega t) & \text{se} \quad \omega\neq 0\\ \\ c_1\cos(\omega_0 t)+c_2\text{sen}\,(\omega_0 t)-\frac{F_0}{2\omega_0}\cos(\omega_0 t) & \text{se} \quad \omega=0\end{cases}$

12. (a) $\lambda=k=1$; $y_h(t)=c_1e^t+c_2t$ (b) $y(t)=(2+\log 2)t-2e^{t-2}-1-t\log t$