Análise Complexa e Equações Diferenciais
2º Semestre 2015/2016

2º Teste, versão A

(CURSOS: LEIC-A, MEAMBI, MEBIOL, MEQ)

28 de Maio de 2016, 11h 30m

Duração: 1h 30m

1. (a) Resolva o problema de valor inicial

$$2y^2 + 6x + 4xy\frac{dy}{dx} = 0 \qquad , \qquad y(-1) = \sqrt{3}$$

indicando o intervalo máximo de existência de solução.

(b) Considere a pequação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + (\cos t)y^2 = 0\,.$$

Determine a sua solução geral. Indique os valores de y_0 para os quais a solução da equação que verifica $y(0) = y_0$ tem $\mathbb{R}$ como intervalo máximo de existência.

Resolução:

(a) Sendo

$$M/x, y) = 2y^2 + 6x \qquad , \qquad N(x, y) = 4xy$$

verifica-se que ambas as funções são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad , \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ .$$

Conclui-se que o campo $(M(x, y), N(x, y))$ é um campo grandiente em $\mathbb{R}^2$, pelo que existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

- $\nabla\Phi = (M, N)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- $2y^2 + 6x + 4xy\frac{dy}{dx} = 0$ é equivalnete a $\frac{d\Phi}{dx} = 0$.

Para determinar Φ, note-se que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y) = 2y^2x + 3x^2 + c(y)\ ,$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \quad \Rightarrow \quad 4xy + c'(y) = 4xy \quad \Rightarrow \quad c(y) = c \in \mathbb{R}\,.$$

Então

$$\Phi(x, y) = 2y^2x + 3x^2 + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}\,,$$

e as soluções da equação diferencial são definidas por

$$2y^2x + 3x^2 = k \quad , \quad k \in \mathbb{R} \, .$$

Para que a condição inicial seja verificada $k = -3$, e assim a solução do (PVI) é

$$y(x) = \sqrt{\frac{-3(x^2+1)}{2x}} \, ,$$

tendo-se então que o seu intervalo máximo de existência é $]-\infty, 0[$ (o maior intervalo contido no domínio de $y'(x)$ e ao qual $x_0 = -1$ pertence).

(b) Trata-se de uma equação separável, que tem $y(t) \equiv 0$ como solução de equilíbrio. Por outro lado

$$\frac{dy}{dt} + (\cos t)y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^{-2}\frac{dy}{dt} = -\cos t \quad \Leftrightarrow \quad -y^{-1} = -\operatorname{sen} t + c$$

e a solução geral da equação é dada por

$$y(t) \equiv 0 \qquad \text{ou} \qquad y(t) = \frac{1}{\operatorname{sen} t + c} \; , \; c \in \mathbb{R}$$

Para determinar os valores de y_0 para os quais o intervalo máximo de existência de solução do (PVI) é $\mathbb{R}$, começamos por referir que se $y_0 = 0$ a única solução que verifica $y(0) = 0$ é a solução nula que está obviamente definida em $\mathbb{R}$. Por outro lado, se $y_0 \neq 0$ a solução nula não é solução do (PVI), e determinando c obtem-se que

$$y(t) = \frac{1}{\operatorname{sen} t + \frac{1}{y_0}}$$

é a solução do (PVI). Assim , para que a solução esteja definida em $\mathbb{R}$ o denominador não se pode anular e para que isso aconteça $0 < |y_0| < 1$. Conclui-se que o intervalo máximo de existência de solução é $\mathbb{R}$ se $|y_0| < 1$.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Calcule e^{tA}

   (b) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 1 \\ y' = 2x + y - 3 \end{cases} \qquad , \qquad \big(x(0), y(0)\big) = (2, 1)$$

   Sugestão: Determine uma solução particular da equação.

Resolução:

(a) Calculemos os valores próprios de A:

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \pm 2\mathrm{i} \, .$$

Sendo um par de complexos conjugados apenas precisamos de calcular um vector próprio associado a um deles. Calculemos, assim, um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 1 + 2\mathrm{i}$:

$$(A-(1+2\mathrm{i})I)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -2\mathrm{i} & -2 \\ 2 & -2\mathrm{i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -2\mathrm{i}a-2b = 0\,.$$

Escolhendo, por exemplo, $a = \mathrm{i}$, obtemos $b = -\mathrm{i}a = 1$, e o vector próprio $\mathbf{v}_1 = (\mathrm{i}, 1)$. Com esta informação, para posseguir podemos optar entre dois métodos:

Método 1:

Ao valor próprio $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1-2\mathrm{i}$ corresponde o vector próprio $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}}_1 = (-\mathrm{i}, 1)$. Assim, designando

$$D = \begin{bmatrix} 1+2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-2\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

efectuando os cálculos obtemos

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Se^{tD}S^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{(1+2\mathrm{i})t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2\mathrm{i})t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\mathrm{i}/2 & 1/2 \\ \mathrm{i}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (e^{(1+2\mathrm{i})t}+e^{(1-2\mathrm{i})t})/2 & \mathrm{i}(e^{(1+2\mathrm{i})t}-e^{(1-2\mathrm{i})t})/2 \\ -\mathrm{i}(e^{(1+2\mathrm{i})t}-e^{(1-2\mathrm{i})t})/2 & (e^{(1+2\mathrm{i})t}+e^{(1-2\mathrm{i})t})/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t\cos 2t & -e^t\operatorname{sen} 2t \\ e^t\operatorname{sen} 2t & e^t\cos 2t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Método 2:

Uma solução complexa do sistema $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ é dada por

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 = e^{(1+2\mathrm{i})t}\begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} \mathrm{i}(\cos 2t+\mathrm{i}\operatorname{sen} 2t) \\ \cos 2t+\mathrm{i}\operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} -\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} + \mathrm{i}e^t\begin{bmatrix} \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}.$$

Duas soluções reais linearmente independentes serão então

$$\operatorname{Re}\mathbf{u}(t) = e^t\begin{bmatrix} -\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Im}\mathbf{u}(t) = e^t\begin{bmatrix} \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}.$$

com as quais podemos formar a solução matriz fundamental

$$X(t) = \begin{bmatrix} -e^t\operatorname{sen} 2t & e^t\cos 2t \\ e^t\cos 2t & e^t\operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$e^{tA} = X(t)X(0)^{-1} = X(t)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t\cos 2t & -e^t\operatorname{sen} 2t \\ e^t\operatorname{sen} 2t & e^t\cos 2t \end{bmatrix}.$$

(Note que esta matriz corresponde a escolher para colunas da matriz fundamental as mesmas soluções reais mas pela ordem inversa).

(b) A equação diferencial vectorial (sistema) dada pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Para obtermos uma solução particular desta equação podemos optar por usar a fórmula da variação dos parâmetros. No entanto, neste caso, o termo não homogéneo $\mathbf{b}(t) = (1, -3)$ é constante e, sendo assim, podemos tentar encontrar uma solução particular constante (x_P, y_P). Substituindo na equação, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x_P - 2y_P + 1 = 0 \\ 2x_P + y_P - 3 = 0 \end{cases},$$

o qual, tem como solução, $(x_P, y_P) = (1, 1)$. A solução geral da equação diferencial vectorial linear será dada então por

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}.$$

As constantes c_1, c_2 são calculadas usando a condição inicial:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = 1 \quad \text{e} \quad c_2 = 0\,.$$

A solução do problema de valor inicial pedida será então,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \cos 2t + 1 \\ e^t \operatorname{sen} 2t + 1 \end{bmatrix}.$$

3. Considere a equação diferencial

$$y'' - y' - 2y = 9e^{-t}\ .$$

(a) Calcule a solução geral da equação homogénea associada.

(b) Determine a solução da equação que verifica $y(0) = 0$ e $y'(0) = -3$.

(c) Escreva uma matriz wronskiana associada à equação.

Resolução:

(a) Usando a notação $y' = Dy$, a equação homogénea associada escreve-se como

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - D - 2)y = 0$$

O polinómio característico associado é

$$P(R) = R^2 - R - 2 = (R-2)(R+1)$$

Assim a solução geral da equação homogénea associada é

$$y_H(t) = ae^{2t} + be^{-t} \qquad , \qquad a, b \in \mathbb{R}\ .$$

(b) Começemos por determinar a solução geral da equação. Por ser uma equação linear, a solução podr ser escrita como $yt) = y_H(t) * y_P(t)$, em que y_H é a solução geral da equação homogénea associada (determinada na alínea (a)), e y_P é uma solução particular da equação. Para determinar y_P vamos usar o método dos coeficientes indeterminados. Semdo $P_A(D) = D + 1$ o polinómio aniquilador da função $9e^{-t}$, teremos

$$(D-2)(D+1)y = 9e^{-t} \quad \Rightarrow \quad (D-2)(D+1)^2 y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = ae^{2t} + be^{-t} + cte^{-t} \ .$$

Dado que $y(t) = y_H(t) + cte^{-t}$ depreende-se que a forma da solução particular é $w(t) = cte^{-t}$. Finalmente vamos calcualar a constante c de forma a que w seja solução da equação, isto é

$$w'' - w' - 2w = 9e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad (-ce^{-t} - ce^{-t} + cte^{-t}) - (ce^{-t} - cte^{-t}) - 2(cte^{-t}) = 9e^{-t}$$

pelo que, para todo $t \in \mathbb{R}$, se tem

$$-3ce^{-t} = 9e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad c = -3 \ .$$

Assim, a solução geral da equação é

$$y(t) = ae^{2t} + be^{-t} - 3te^{-t} \ .$$

Para que se verifiquem as condições iniciais tem-se que

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - b - 3 = -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = b = 0$$

A solução do (PVI) é $y(t) = -3te^{-t}$.

(c) Uma matriz wronskiana associada é por exemplo

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

(1,5 val.) 4. Resolva o problema de valores na fronteira e iniciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & \text{para} \quad x \in]0, 2\pi[\ , \ t > 0 \, , \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,t) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \, , \\ u(x,0) = 1 + 10\cos 3x & \text{para} \quad x \in]0, 2\pi[\ . \end{cases}$$

Resolução: Usemos o método de separação de variáveis. Comecemos por procurar soluções não triviais da equação diferencial parcial (EDP) satisfazendo as condições fronteira (CF) em $x = 0, 2\pi$, e que são da forma $X(x)T(t)$. Por substituição na EDP obtemos

$$XT' = 2X''T \, .$$

Dividindo ambos os membros por $2XT$ obtemos,

$$\frac{T'(t)}{2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma \, ,$$

em que, como a expressão do primeiro membro é independente de x e a do segundo membro é independente de t, σ é simultaneamente independente de x e t, ou seja, é uma constante real. Obtemos assim o seguinte par de equações diferenciais ordinárias:

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0, \qquad T'(t) - 2\sigma T(t) = 0\,.$$

Por substituição de XT nas condições fronteira (CF), obtemos $X'(0)T(t) = X'(2\pi)T(t)$, para todo $t > 0$, o que implica $X'(0) = X'(2\pi) = 0$. Obtém-se soluções não identicamente nulas para a EDO de 2^a ordem em X com estas últimas condições, se e só se

$$\sigma = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = -\left(\frac{n\pi}{2\pi}\right)^2 = -\frac{n^2}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

casos em que

$$X(x) = a\cos(\frac{n\pi x}{L}) = a\cos(\frac{n\pi x}{2\pi}) = a\cos(\frac{nx}{2}).$$

Para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, a equação para $T(t)$ escreve-se

$$T'(t) + \frac{n^2}{2}T(t) = 0,$$

cuja solução geral é

$$T(t) = ce^{-\frac{n^2}{2}t}\,.$$

Obtemos assim as seguintes soluções da (EDP) que satisfazem (CF):

$$ce^{-\frac{n^2}{2}t}\cos(\frac{nx}{2}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \,.$$

As combinações lineares destas soluções também serão soluções da (EDP) verificando as mesmas (CF). Procuremos então a solução do problema na forma:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2}{2}t}\cos(\frac{nx}{2}).$$

As constantes a_n são ajustadas por forma a ser satisfeita a condição inicial, ou seja,

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{nx}{2}) = 1 + 10\cos 3x, \quad \text{para } x \in [0, 2\pi]\,.$$

Concluimos que $a_0 = 2$, $a_6 = 10$ e $a_n = 0$ se $n \neq 0, 6$. Logo, a solução do problema é

$$u(x,t) = 1 + 10e^{-18t}\cos 3x\,.$$

(1,0 val.) 5. Determine a série de Fourier de senos associada à função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x$. Indique a soma daquela série para cada $x \in [0,1]$.

Resolução:
Os coeficientes da série de senos de f no intervalo $[0, L] = [0, 1]$ são dados por

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) dx = 2 \int_0^1 (1-x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\ =& \frac{2}{n\pi} \left([-(1-x)\cos(n\pi x)]_0^1 - \int_0^1 \cos(n\pi x) dx \right) \\ =& \frac{2}{n\pi} \left(1 + \frac{1}{n\pi} [\operatorname{sen}(n\pi x)]_0^1 \right) \\ =& \frac{2}{n\pi}, \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, \ldots$. A série de senos de f é então,

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\pi x) .$$

A série de senos de $f(x)$ é a série de Fourier da extensão ímpar $2L$-periódica de $f(x)$. Chamemos $f_i(x)$ a esta extensão. Sendo esta função e a sua derivada contínuas por troços em $[-L, L]$, o Teorema de Fourier permite concluir que a soma da série de senos de $f(x)$ é

$$S_f(x) = \frac{f_i(x^+) + f_i(x^-)}{2}.$$

Para $x \in]0, 1[$, f_i coincide com f e é, por conseguinte contínua, pelo que $S_f(x) = f(x) = 1 - x$. Em $x = 0$, $f_i(0^+) = f(0^+) = +1$, e $f_i(0^-) = -f_i(0^+) = -1$, pelo que, $S_f(0) = 0$. Em $x = 1$, $f_i(1^-) = f(1^-) = 0$ e $f_i(1^+) = -f_i(1^-) = 0$ (logo, f_i também é contínua nesse ponto). Concluindo,

$$S_f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1 , \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 . \end{cases}$$

(1,0 val.) 6. Considere o problema de valor inicial

$$y' = 3y^{2/3} , \quad y(0) = 0 .$$

Mostre que, para cada $\alpha \in [0, 1]$ existe uma solução deste problema que satisfaz $y(1) = \alpha$. Justifique porque é que este facto não contradiz o teorema de Picard-Lindelof.

Resolução:
Trata-se de uma equação separável que pode ser facilmente resolvida: Se $y(t) \neq 0$, para t em algum intervalo aberto, temos nesse intervalo,

$$y' = 3y^{2/3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} y^{-2/3} y' = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(y^{1/3}) = 1 \Leftrightarrow y^{1/3}(t) = t + C \Leftrightarrow y(t) = (t + C)^3,$$

onde C é uma constante. Por outro lado, a constante $y(t) = 0$ também é solução.

Seja dada uma constante $\alpha \in [0, 1]$. Se $\alpha = 0$, a solução trivial $y(t) = 0$ satisfaz os requisitos. Consideremos agora $\alpha \in]0, 1]$ e uma solução que satisfaça $y(1) = \alpha$:

$$y(1) = (1 + C)^3 = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad C = -1 + \sqrt[3]{\alpha} .$$

Logo,

$$y(t) = (t - 1 + \sqrt[3]{\alpha})^3\,,$$

para $t > 1 - \sqrt[3]{\alpha}\,$. Notando que $\lim\limits_{t\to(1-\sqrt[3]{\alpha})^+} = 0$, consideremos a função

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \leqslant 1 - \sqrt[3]{\alpha}\,, \\ (t - 1 + \sqrt[3]{\alpha})^3 & \text{se} \quad t > 1 - \sqrt[3]{\alpha}\,. \end{cases}$$

É uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, a qual satisfaz a equação diferencial para cada $t \in \mathbb{R}$, e que satisfaz $\tilde{y}(0) = 0$ e $\tilde{y}(1) = \alpha$. Logo, é uma solução do problema de valor inicial dado com a propriedade pedida.

O resultado anterior mostra que a EDO tem uma infinidade de soluções que satisfazem a condição inicial $y(0) = 0$. A razão pela qual este facto não contradiz o teorema de existência e unicidade de Picard-Lindelof é que as condições de aplicabilidade desse teorema não são aqui satisfeitas. Justificação: designando $f(t,y) = \frac{1}{3}y^{2/3}$, temos,

$$\lim_{y\to 0} \frac{|f(t,y) - f(t,0)|}{|y-0|} = \lim_{y\to 0} \frac{|y^{2/3}/3|}{|y|} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{3|\sqrt[3]{y}|} = +\infty,$$

pelo que, em qualquer bola de raio positivo centrada no ponto $(0,0)$ a razão $\frac{|f(t,y)-f(t,0)|}{|y-0|}$ não é majorada, ou seja, $f(t,y)$ não é localmente Lipschitz relativamente a y em nenhum aberto contendo $(0,0)$, não ficando assim satisfeita umas das hipóteses do referido teorema.