

Análise Complexa e Equações Diferenciais
2º Semestre 2015/2016

2º Teste, versão A

(CURSOS: LEIC-A, MEAMBI, MEBIOL, MEQ)

28 de Maio de 2016, 11h 30m

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular, telemóveis, tablets, etc.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Numere todas as páginas do seu caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões estão respondidas.

| Pergunta | Páginas | Cotação | Classificação |
|----------|---------|---------|---------------|
| 1) | | 2,5 | |
| 2) | | 2,0 | |
| 3) | | 2,0 | |
| 4) | | 1,5 | |
| 5) | | 1,0 | |
| 6) | | 1,0 | |
| Total | | 10 | |

Nome: _____

N^o : _____

Sala: _____

Curso: _____

Rubrica (DOCENTE):

(1.5 val) 1. (a) Resolva o problema de valor inicial

$$2y^2 + 6x + 4xy \frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad y(-1) = \sqrt{3}$$

indicando o intervalo máximo de existência de solução.

(1.0 val) (b) Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + (\cos t)y^2 = 0.$$

Determine a sua solução geral. Indique os valores de y_0 para os quais a solução da equação que verifica $y(0) = y_0$ tem \mathbb{R} como intervalo máximo de existência.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1.0 val) (a) Calcule e^{tA}

(1.0 val) (b) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 1 \\ y' = 2x + y - 3 \end{cases} \quad , \quad (x(0), y(0)) = (2, 1)$$

Sugestão: Determine uma solução particular da equação.

3. Considere a equação diferencial

$$y'' - y' - 2y = 9e^{-t}.$$

(0.5 val) (a) Calcule a solução geral da equação homogénea associada.

(1.0 val) (b) Determine a solução da equação que verifica $y(0) = 0$ e $y'(0) = -3$.

(0.5 val) (c) Escreva uma matriz wronskiana associada à equação.

(1,5 val.) 4. Resolva o problema de valores na fronteira e iniciais

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & \text{para } x \in]0, 2\pi[, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi, t) = 0 & \text{para } t > 0, \\ u(x, 0) = 1 + 10 \cos 3x & \text{para } x \in]0, 2\pi[. \end{cases}$$

(1,0 val.) 5. Determine a série de Fourier de senos associada à função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x$. Indique a soma daquela série para cada $x \in [0, 1]$.

(1,0 val.) 6. Considere o problema de valor inicial

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0.$$

Mostre que, para cada $\alpha \in [0, 1]$ existe uma solução deste problema que satisfaz $y(1) = \alpha$. Justifique porque é que este facto não contradiz o teorema de Picard-Lindelof.