TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2015/2016

1º Teste, versão B

(Cursos: LEIC-A, MEAmbi, MEBiol, MEQ)

09 de Abril de 2016, 11h 30m

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular, telemóveis, tablets, etc.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Numere todas as páginas do seu caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões estão respondidas.

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1)		3,0	
2)		2,5	
3)		2,0	
4)		1,5	
5)		1,0	
Total		10	

Nome: ____

Nrº : ______________________ **Sala:** __________

Curso: ____________________ **Rubrica (DOCENTE):**

1. Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x,y) = e^{ay+1}\cos x + ax^2 + by^2 \ ,$$

onde a e b são duas constantes reais.

(1.0 val) (a) Calcule os valores de a e b, para os quais u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

(1.0 val) (b) Para a escolha particular $a = 1$, $b = -1$, determine a função inteira f tal que

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y) \quad \text{e} \quad f(-\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,.$$

(1.0 val) (c) Calcule

$$\oint_{|z|=20} \frac{f(z)}{(z+\mathrm{i})^2}\,dz\,,$$

em que a curva é percorrida uma vez em sentido direto.

2. Considere as funções complexas definida nos seus domínios por

$$f(z) = z^2 e^{\mathrm{i}\pi z^3} \qquad \text{e} \qquad g(z) = \frac{4}{2\mathrm{i} - z}\,.$$

(1.0 val) (a) Obtenha o desenvolvimento em série de Laurent centrado em $z_0 = 0$ da função g e indique o maior conjunto aberto onde esse desenvolvimento é válido.

(1.0 val) (b) Calcule o valor do integral

$$\int_\gamma \Big(f(z) + g(z)\Big)\,dz\ ,$$

em que γ é a curva parametrizada por $z(\theta) = 2\cos\theta^3 + 3\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta^3$ com $0 \le \theta \le \sqrt[3]{\pi}$.

(0.5 val) (c) Indique justificando se a função $f(z)g(z)$ admite série de Taylor centrada em i. Em caso afirmativo
indique o raio de convergência da série.

3. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0,1,2\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z) + 1}{(z-1)(z-2)} + \frac{1}{z(z-2)^2} + z^2 e^{\frac{1}{z}}\,.$$

(1.5 val) (a) Classifique as singularidades de f e calcule os respetivos resíduos.

(0.5 val) (b) Aproveite o resultado anterior para calcular

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} f(z)\,dz\,,$$

em que a curva é percorrida uma vez no sentido inverso.

(1.5 val) 4. Use o Teorema dos resíduos para determinar o valor do integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}\ .$$

(1.0 val) 5. Seja f uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e que verifica $f(-z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0\ ,$$

para qualquer curva fechada γ que não passa no ponto 0.