TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2015/2016

1º Teste, versão A

(CURSOS: LEIC-A, MEAMBI, MEBIOL, MEQ)

09 de Abril de 2016, 11h 30m

Duração: 1h 30m

1. Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x,y) = ay^2 + bx^2 + e^{bx-1} \operatorname{sen} y \ ,$$

onde a e b são duas constantes reais.

(a) Calcule os valores de a e b, para os quais u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

(b) Para a escolha particular $a = -1$, $b = 1$, determine a função inteira f tal que

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x + iy) \quad \text{e} \quad f(1) = 1 - i\,.$$

(c) Calcule

$$\oint_{|z|=16} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz\,,$$

em que a curva é percorrida uma vez em sentido inverso.

Resolução:

(a) Dado que a função é claramente de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$, u será harmónica em $\mathbb{R}^2$ para os valores de a e b para os quais

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Assim,

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 2b + b^2 e^{bx-1} \operatorname{sen} y + 2a - e^{bx-1} \operatorname{sen} y = 2(a+b) + (b^2-1)e^{bx-1} \operatorname{sen} y = 0 \ .$$

Vamos supor que existem constantes a e b para os quais $a + b \neq 0$ e $b^2 - 1 \neq 0$. Pela igualdae acima

$$e^{bx-1} \operatorname{sen} y = \frac{2(a+b)}{1-b^2} \quad , \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

e assim, para certos valores de a e b a função $e^{bx-1}\operatorname{sen} y$ teria que ser constante, o que é obviamente absurdo. Assim

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ b^2-1=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \end{array}\right. .$$

(b) Sendo $u(x,y)=x^2-y^2+e^{x-1}\operatorname{sen} y$ harmónica, a sua conjugada, v, é determinada, a menos de constante, pelas equações de Cauchy-Riemann. Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad v(x,y)=\int (2x+e^{x-1}\operatorname{sen} y)dy \quad \Leftrightarrow \quad v(x,y)=2xy-e^{x-1}\cos y+c(x)$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}(2xy-e^{x-1}\cos y+c(x))=-\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2+e^{x-1}\operatorname{sen} y) \\ &\Leftrightarrow \quad 2y-e^{x-1}\cos y+c'(x)=2y-e^{x-1}\cos y \\ &\Leftrightarrow \quad c(x)=c\ . \end{aligned}$$

Então,

$$v(x,y)=2xy-e^{x-1}\cos y+c \qquad , \qquad c\in\mathbb{R}\ .$$

Para que $f(1)=1-\mathrm{i}$ é necessário e suficiente que $u(1,0)=1$, o que se verifica, e que $v(1,0)=-1$, o que se verifica sse $c=0$. A função pedida é então,

$$f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=x^2-y^2+e^{x-1}\operatorname{sen} y+\mathrm{i}(2xy-e^{x-1}\cos y)\ .$$

(c) Vamos considerar γ como sendo a curva $|z|=16$ percorrida uma vez em sentido directo. Dado que

- f é uma função inteira;
- γ é uma curva de Jordan;
- $1\in$ int γ,

estamos nas condições de aplicabilidade da Fórmula integral de Cauchy, pelo que

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz &= 2\pi\mathrm{i}f'(1)=2\pi\mathrm{i}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big|_{z=1} \\ &= 2\pi\mathrm{i}\Big(2x+e^{x-1}\operatorname{sen} y+\mathrm{i}(2x-e^{x-1}\cos y)\Big)\Big|_{z=1} \\ &= 2\pi\mathrm{i}(2-\mathrm{i})=2\pi(1+2\mathrm{i})\ . \end{aligned}$$

Conclui-se que o integral pedido é

$$\oint_{|z|=16} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz = -2\pi(1+2\mathrm{i})\ .$$

2. Considere as funções complexas definida nos seus domínios por

$$f(z) = ze^{-\mathrm{i}\pi z^2} \qquad \text{e} \qquad g(z) = \frac{2}{4\mathrm{i} - z} \,.$$

(a) Obtenha o desenvolvimento em série de Laurent centrado em $z_0 = 0$ da função g e indique o maior conjunto aberto onde esse desenvolvimento é válido.

(b) Calcule o valor do integral

$$\int_\gamma \Big(f(z) + g(z) \Big)\, dz \ ,$$

em que γ é a curva parametrizada por $z(\theta) = 4\cos\theta^3 + 5\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta^3$ com $0 \leqslant \theta \leqslant \sqrt[3]{\pi}$.

(c) Indique justificando se a função $f(z)g(z)$ admite série de Taylor centrada em $2\mathrm{i}$. Em caso afirmativo indique o raio de convergência da série.

Resolução:

(a) Visto f ser analítica em $\mathbb{C} \setminus \{4\mathrm{i}\}$ (pelo que é analítica em $z_0 = 0$) terá uma série de Taylor válida no disco $|z| < |4\mathrm{i}| = 4$ e uma série de Laurent válida no exterior do disco, isto é, na coroa $4 < |z| < +\infty$. Para qualquer z nesta coroa,

$$f(z) = \frac{2}{4\mathrm{i} - z} = \frac{2}{-z}\frac{1}{1 - \frac{4\mathrm{i}}{z}} = \frac{2}{-z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4\mathrm{i}}{z}\right)^n = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n \mathrm{i}^n}{z^{n+1}} \ .$$

(b) A curva γ é uma curva aberta e simples que une os pontos 4 a -4. Para calcular $\int_\gamma f(z)\, dz$ observe-se que

- f é uma função inteira;
- $F(z) = \frac{1}{-2\mathrm{i}\pi}e^{-\mathrm{i}\pi z^2}$ é uma função inteira, e $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Conclui-se que F é uma primitiva de f em $\mathbb{C}$ e assim, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtem-se,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \frac{1}{-2\mathrm{i}\pi}e^{-\mathrm{i}\pi z^2}\Big|_4^{-4} = \frac{1}{-2\mathrm{i}\pi}\left(e^{-16\mathrm{i}\pi} - e^{-16\mathrm{i}\pi}\right) = 0 \ .$$

Para calcular $\int_\gamma g(z)\, dz$, considere $g(z) = \frac{-2}{z-4\mathrm{i}}$, e observe que

- $g(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{4\mathrm{i}\}$ (em particular é analítica num aberto que contem a curva γ, dado que $z(\theta) \neq 4\mathrm{i}$ para todo θ).
- $G(z) = -2\log(z - 4\mathrm{i})$ com $\beta \leqslant \mathrm{Arg}\,(z - 4\mathrm{i}) < \beta + 2\pi$, é analítica no conjunto $\mathbb{C} \setminus \{z = 4\mathrm{i} + re^{\beta\mathrm{i}}\,,\, r \in \mathbb{R}_0^+\}$.
- Para $z - 4\mathrm{i} \neq re^{\beta\mathrm{i}}$, $r \geqslant 0$ tem-se que $G'(z) = g(z)$.

Conclui-se que G é uma primitiva de g em $\mathbb{C} \setminus \{z = 4\mathrm{i} + re^{\beta \mathrm{i}} \ , \ r \geqslant 0\}$. Para podermos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo temos que escolher β de modo a que a curva $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{z = 4\mathrm{i} + re^{\beta \mathrm{i}} \ , \ r \geqslant 0\}$. Por exemplo, para $\beta = -\frac{\pi}{2}$ existe um conjunto aberto contendo γ e onde G é primitiva de g. Assim, usando a função logaritmo escolhida ($\log w = \log |w| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\, w$ com $\mathrm{Arg}\, w \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$), teremos

$$\begin{aligned}
\int_\gamma g(z)\, dz &= -2\log(z-4\mathrm{i})\Big|_4^{-4} \\
&= -2\Big(\log(-4-4\mathrm{i}) - \log(4-4\mathrm{i})\Big) \\
&= -2\Big(\log|-4-4\mathrm{i}| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\,(-4-4\mathrm{i}) - \log|4-4\mathrm{i}| - \mathrm{i}\mathrm{Arg}\,(4-4\mathrm{i})\Big) \\
&= -2(\mathrm{i}\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}) = -3\pi\mathrm{i}\ .
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int_\gamma \Big(f(z) + g(z)\Big)\, dz = -3\pi\mathrm{i}\ .$$

(c) A função fg é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{4\mathrm{i}\}$ e, portanto, no círculo aberto centrado em $z_0 = 2\mathrm{i}$ e de raio $R = |2\mathrm{i} - 4\mathrm{i}| = 2$. Então, pelo teorema de Taylor, fg admite desenvolvimento em série de Taylor centrada em $2\mathrm{i}$, o qual consiste numa série de potências de $z - 2\mathrm{i}$, cuja soma dá o valor de $f(z)g(z)$ em cada ponto z do círculo aberto centrado em $2\mathrm{i}$ e de raio $R = 2$. Por outro lado, esse é o maior círculo aberto centrado em $2\mathrm{i}$ em que essa série de potências converge, uma vez que fg tem um polo de ordem 1 em $4\mathrm{i}$, o qual está na sua fronteira. Logo, o raio de convergência da série é $R = 2$.

3. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 2, 3\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z) - 1}{(z-2)(z-3)} + \frac{1}{z(z-3)^2} + z^4 e^{\frac{1}{z}}\ .$$

   (a) Classifique as singularidades de f e calcule os respetivos resíduos.

   (b) Aproveite o resultado anterior para calcular

$$\oint_{|z|=\frac{5}{2}} f(z)\, dz\,,$$

   em que a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

Resolução:

(a) Vamos considerar $f = f_1 + f_2 + f_3$. A função

$$f_3(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}$$

tem singularidade em 0. Para $0 < |z| < \infty$,

$$f_3(z) = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4-n}}{n!} = z^4 + z^3 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!z} + \frac{1}{6!z^2} + \frac{1}{7!z^3} + \cdots$$

Esta série de Laurent tem parte principal com um número infinito de termos, pelo que 0 é uma singularidade essencial de f_3 e

$$\operatorname{Res}(f_3, 0) = \frac{1}{5!}\,.$$

A função

$$f_2(z) = \frac{1}{z(z-3)^2}$$

tem singularidades em 0 e 3. Visto

$$\lim_{z\to 0} z f_2(z) = \frac{1}{9}\,,$$

conclui-se que 0 é um polo simples de f_2 e

$$\operatorname{Res}(f_2, 0) = \frac{1}{9}\,.$$

Visto

$$\lim_{z\to 3} (z-3)^2 f_2(z) = \frac{1}{3}\,,$$

conclui-se que 3 é um polo de segunda ordem de f_2 e

$$\operatorname{Res}(f_2, 3) = \lim_{z\to 3} \Big((z-3)^2 f_2(z)\Big)' = \lim_{z\to 3} \Big((\frac{1}{z}\Big)' = -\frac{1}{9}\,.$$

A função

$$f_1(z) = \frac{\cos(\pi z) - 1}{(z-2)(z-3)}$$

tem singularidades em 2 e 3. Visto

$$\lim_{z\to 2} f_1(z) = \lim_{z\to 2} \frac{1}{z-3} \lim_{z\to 2} \frac{\cos(\pi z) - 1}{z-2} = -\lim_{z\to 2} (-\pi \operatorname{sen}(\pi z)) = 0\,,$$

onde se usou a Regra de Cauchy numa indeterminação 0/0 de funções inteiras, conclui-se que 2 é uma singularidade removível de f_1 e que

$$\operatorname{Res}(f_1, 2) = 0\,.$$

Visto

$$\lim_{z\to 3} (z-3) f_1(z) = \frac{-2}{1}\,,$$

conclui-se que 3 é um polo simples de f_1 e

$$\operatorname{Res}(f_1, 3) = -2\,.$$

Finalmente,

- 0 é uma singularidade essencial de f e

$$\operatorname{Res}(f,0)=\operatorname{Res}(f_2,0)+\operatorname{Res}(f_3,0)=\frac{1}{9}+\frac{1}{5!}\,.$$

- 2 é uma singularidade removível de f e

$$\operatorname{Res}(f,2)=\operatorname{Res}(f_1,2)=0\,.$$

- 3 é um polo de segunda ordem de f e

$$\operatorname{Res}(f,3)=\operatorname{Res}(f_1,3)+\operatorname{Res}(f_2,3)=\frac{1}{9}-2\,.$$

(b) Estamos em condições de aplicar o Teorema dos Resíduos dado que a função f tem um número finito de singularidades e a curva considerada é uma curva de Jordan. Dado que $|0|<\frac{5}{2}$, $|2|<\frac{5}{2}$ e $|3|>\frac{5}{2}$, tem-se que

$$\oint_{|z|=\frac{5}{2}} f(z)\,dz=2\pi\mathrm{i}\Big(\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,2)\Big)=2\pi\mathrm{i}\Big(\frac{1}{9}+\frac{1}{5!}\Big)\,.$$

4. Use o Teorema dos resíduos para determinar o valor do integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}\,.$$

Resolução:

Por ser um integral impróprio

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2-6x+10}\,.$$

Como a função integranda $\frac{1}{x^2-6x+10}$ é uma função racional de domínio $\mathbb{R}$ e como Grau$(x^2-6x+10)-$Grau $(1)=2\geqslant 2$, o integral existe. Para calcular I (usando o Teorema dos Resíduos como sugerido), vamos considerar a função de variável complexa

$$F(z)=\frac{1}{z^2-6z+10}$$

e, para R suficientemente grande (neste caso basta $R>\sqrt{10}$), a curva C_R como sendo a fronteira do semicírculio $|z|=R$ em $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ percorrida uma vez em sentido directo. Dado que

$$F(z)=\frac{1}{(z-(3+\mathrm{i}))(z-(3-\mathrm{i}))}$$

e $3+\mathrm{i} \in$ int C_R, $3-\mathrm{i} \notin$ int C_R, tem-se por aplicação do teorema dos resíduos,

$$\oint_{C_R} F(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \mathrm{Res}\,(F, 3+\mathrm{i}) = 2\pi \mathrm{i} \lim_{z\to 2+\mathrm{i}} (z-(3+\mathrm{i}))F(z) = \pi\,,$$

isto por ambas as singularidades de F serem polos simples. Por outro lado,

$$C_R = I_R \cup S_R = \{z = x \in]-R, R[\} \cup \{|z| = R\,,\ \mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}\ .$$

Então,

$$\oint_{C_R} F(z)dz = \int_{I_R} F(z)dz + \int_{S_R} F(z)dz\,,$$

pelo que,

$$\pi = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2-6x+10} + \int_{S_R} F(z)dz\ .$$

Fazendo R convergir para $+\infty$, teremos

$$\pi = I + \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} F(z)dz\,.$$

Como já referido anteriormente, visto Grau$(z^2-6z+10)-$Grau $(1) = 2 \geqslant 2$ podemos concluir que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} F(z)dz = 0\,,$$

e assim sendo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10} = \pi\ .$$

5. Seja f uma função analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e que verifica $f(-z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0\ ,$$

para qualquer curva fechada γ que não passa no ponto 0.

Resolução:

Visto f ser analítica na coroa circular $0 < |z| < \infty$, pelo Teorema de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \qquad , \qquad \forall z \in \{z\,:\,0<|z|<\infty\}\,.$$

Por outro lado, dado que para todo $z \neq 0$ se tem $f(z) = f(-z)$, tem-se, para a série de Laurent considerada,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (-z)^n\,,$$

isto é,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(1-(-1)^n)z^n = 0 \ ,$$

o que implica que todos os coeficientes desta última série terão que ser nulos, ou seja,

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ \ , \ \ a_n(1-(-1)^n) = 0 \, ,$$

e isto implica que, para todos os números inteiros impares n, $a_n = 0$. Assim,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n} z^{2n} \, .$$

Vamos então calcular o valor do integral pedido. Se 0 não pertence à região interior a γ, (o que implica que f é analítica nessa região), por aplicação do Teorema de Cauchy,

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0 \ .$$

Se 0 pertence à região interior a γ, por aplicação do Teorema dos resíduos,

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \mathrm{Res}\,(f,0) = 0 \, ,$$

visto que Res$(f,0)$ é o coeficiente a_{-1} da série de f convergente em $0<|z|<\infty$ o qual é zero pelas considerações feitas.