

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2015/2016

1º Teste, versão A

(CURSOS: LEIC-A, MEAMBI, MEBIOL, MEQ)

09 de Abril de 2016, 11h 30m

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular, telemóveis, tablets, etc.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Numere todas as páginas do seu caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões estão respondidas.

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1)		3,0	
2)		2,5	
3)		2,0	
4)		1,5	
5)		1,0	
Total		10	

Nome: _____

N^o : _____

Sala: _____

Curso: _____

Rubrica (DOCENTE):

1. Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x, y) = ay^2 + bx^2 + e^{bx-1} \operatorname{sen} y ,$$

onde a e b são duas constantes reais.

(1.0 val) (a) Calcule os valores de a e b , para os quais u é harmónica em \mathbb{R}^2 .

(1.0 val) (b) Para a escolha particular $a = -1$, $b = 1$, determine a função inteira f tal que

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) \quad \text{e} \quad f(1) = 1 - i .$$

(1.0 val) (c) Calcule

$$\oint_{|z|=16} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz ,$$

em que a curva é percorrida uma vez em sentido inverso.

2. Considere as funções complexas definida nos seus domínios por

$$f(z) = ze^{-i\pi z^2} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{2}{4i - z} .$$

(1.0 val) (a) Obtenha o desenvolvimento em série de Laurent centrado em $z_0 = 0$ da função g e indique o maior conjunto aberto onde esse desenvolvimento é válido.

(1.0 val) (b) Calcule o valor do integral

$$\int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz ,$$

em que γ é a curva parametrizada por $z(\theta) = 4 \cos \theta^3 + 5i \operatorname{sen} \theta^3$ com $0 \leq \theta \leq \sqrt[3]{\pi}$.

(0.5 val) (c) Indique justificando se a função $f(z)g(z)$ admite série de Taylor centrada em $2i$. Em caso afirmativo indique o raio de convergência da série.

3. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z) - 1}{(z-2)(z-3)} + \frac{1}{z(z-3)^2} + z^4 e^{\frac{1}{z}} .$$

(1.5 val) (a) Classifique as singularidades de f e calcule os respetivos resíduos.

(0.5 val) (b) Aproveite o resultado anterior para calcular

$$\oint_{|z|=\frac{5}{2}} f(z) dz ,$$

em que a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

(1.5 val) 4. Use o Teorema dos resíduos para determinar o valor do integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10} .$$

(1.0 val) 5. Seja f uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e que verifica $f(-z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0 ,$$

para qualquer curva fechada γ que não passa no ponto 0.