

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2015/2016

2º Teste — Versão B

(CURSO: LEMAT, MEAER, MEAMBI, MEBIOL, MEEC, MEQ)

19 de Dezembro de 2015, 11h

Duração: 1h 30mINSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular, telemóveis, tablets, etc.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Numere todas as páginas do seu caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões estão respondidas.

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1)		2,0	
2)		2,0	
3)		2,0	
4)		1,0	
5)		2,0	
6)		1,0	
Total		10	

Nome: _____

N^o : _____

Sala: _____

Curso: _____

Rúbrica (DOCENTE):

(1,0 val) 1. (a) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = \frac{1}{t^5}; \quad y(1) = -1$$

indicando o intervalo máximo de definição.

(1,0 val) (b) Determine a solução geral da equação

$$\frac{dy}{dt} = 2y(2 + y)t$$

Indique uma condição inicial, da forma $y(0) = y_0$, para a qual a solução do problema de valor inicial explode.

2. Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(1,0 val) (a) Determine e^{At} , e resolva o problema $Y' = AY$, $Y(0) = (-1, 1)$.

(1,0 val) (b) Determine uma solução particular da equação $Y' = AY + B(t)$ em que $B(t) = (e^t, 0)$.

3. Considere a equação diferencial

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = h(t) .$$

(1,0 val) (a) Considerando $h(t) \equiv 0$, determine a solução geral da equação. Indique, justificando, a forma das soluções limitadas em $[0, \infty[$. Existem soluções limitadas em \mathbb{R} ?

(1,0 val) (b) Determine a solução da equação que verifica $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, escolhendo para $h(t)$ **uma e só uma** das seguintes funções:

$$h(t) = 12\delta(t - 4) \quad \text{ou} \quad h(t) = 9e^t$$

onde $\delta(t - 4)$ representa a distribuição delta de Dirac centrada em 4.

(1,0 val) 4. Considere a função f definida em $[-2, 2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \quad \text{ou} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

Calcule a sua série de Fourier e indique a soma da série no intervalo $[-2, 2]$.

5. Considere o problema de valor inicial com condições de Dirichlet homogêneas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12x^2 & , \quad t > 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \\ u(t, 0) = 0 \quad , \quad u(t, \pi) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(0, x) = x^4 - \pi^3 x + \sum_{n=1}^4 \frac{\text{sen}(2nx)}{2n} & , \quad 0 < x < \pi \end{cases} \quad (1)$$

(0,5 val) (a) Determine uma solução estacionária, isto é da forma $u(t, x) = v(x)$, da equação diferencial que verifique $v(0) = 0$ e $v(\pi) = 0$.

(1,5 val) (b) Determine uma solução de (1)

(1,0 val) 6. Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , limitada em \mathbb{R} . Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -y\varphi(t + y) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

em que α é uma constante real positiva. Mostre que o problema tem solução única e que o seu intervalo máximo de existência é \mathbb{R} . Se adicionalmente se tiver que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r)$ existe e é positivo, calcule justificando o $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$, onde y representa a solução do problema.