TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2015/2016

2º Teste — Versão A

(CURSO: LEMAT, MEAER, MEAMBI, MEBIOL, MEEC, MEQ)

19 de Dezembro de 2015, 11h

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular, telemóveis, tablets, etc.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Numere todas as páginas do seu caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões estão respondidas.

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1)		2,0	
2)		2,0	
3)		2,0	
4)		1,0	
5)		2,0	
6)		1,0	
Total		10	

Nome: ____

Nº : __________________________ **Sala:** ____________

Curso: ________________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

(1,0 val.) 1. (a) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}\, y = \frac{1}{t^3} \quad ; \quad y(1) = 1$$

indicando o intervalo máximo de definição.

(1,0 val.) (b) Determine a solução geral da equação

$$\frac{dy}{dt} = 2y(1+y)t$$

Indique uma condição inicial, da forma $y(0) = y_0$, para a qual a solução do problema de valor inicial explode.

2. Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

(1,0 val.) (a) Determine e^{At}, e resolva o problema $Y' = AY$, $Y(0) = (1\,,\,-1)$.

(1,0 val.) (b) Determine uma solução particular da equação $Y' = AY + B(t)$ em que $B(t) = (0, e^{-t})$.

3. Considere a equação diferencial

$$y''' - 7y' + 6y = h(t) \;\; .$$

(1,0 val.) (a) Considerando $h(t) \equiv 0$, determine a solução geral da equação. Indique, justificando, a forma das soluções limitadas em $[0, \infty[$. Existem soluções limitadas em $\mathbb{R}$?

(1,0 val.) (b) Determine a solução da equação que verifica $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, escolhendo para $h(t)$ **uma e só uma** das seguintes funções:

$$h(t) = 20\delta(t-2) \qquad \textbf{ou} \qquad h(t) = 16e^t$$

onde $\delta(t-2)$ representa a distribuição delta de Dirac centrada em 2.

(1,0 val.) 4. Considere a função f definida no intervalo $[-4, 4]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -4 \le x \le -2 \quad \text{ou} \quad 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{se} \quad -2 < x < 2 \end{cases} \quad .$$

Calcule a sua série de Fourier e indique a soma da série no intervalo $[-4, 4]$.

5. Considere o problema de valor inicial com condições de Dirichlet homogéneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6x & , \quad t > 0 \;\; , \;\; 0 < x < \pi \\[2ex] u(t,0) = 0 \;\; , \;\; u(t,\pi) = 0 & , \quad t > 0 \\[2ex] u(0,x) = -x^3 + \pi^2 x + \displaystyle\sum_{n=1}^{5} \frac{\operatorname{sen}\big((2n+1)x\big)}{2n+1} & , \quad 0 < x < \pi \end{cases} \tag{1}$$

(0,5 val.) (a) Determine uma solução estacionária, isto é da forma $u(t,x) = v(x)$, da equação diferencial que verifique $v(0) = 0$ e $v(\pi) = 0$.

(1,5 val.) (b) Determine uma solução de (1)

(1,0 val.) 6. Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, limitada em $\mathbb{R}$. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -y\varphi(t+y) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

em que α é uma constante real positiva. Mostre que o problema tem solução única e que o seu intervalo máximo de existência é $\mathbb{R}$. Se adicionalmente se tiver que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \varphi(r)$ existe e é positivo, calcule justificando o $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t)$, onde y representa a solução do problema.