Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2015/2016

1º Teste, versão B

(Cursos: LEMat, MEAer, MEAmbi, MEBiol, MEEC, MEQ)

31 de Outubro de 2015, 11h

Duração: 1h 30m

1. Para cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere a função real $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(x,y) = \beta^2 y^2 - x^2 + 4\beta y \ .$$

(1 val) (a) Determine os valores de β para os quais v é a parte imaginária de uma função holomorfa em $\mathbb{C}$.

(1.5 val) (b) Considerando $\beta = 1$, determine a função f holomorfa em $\mathbb{C}$ de modo a que Im $f = v$ e $f(1) = -\mathrm{i}$.

(1.0 val) (c) Sendo f a função que determinou na alínea anterior, calcule

$$\oint_\gamma \frac{e^{-f(z)}}{(z-1)^2}\, dz$$

em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 2015\}$ percorrida uma vez em sentido directo.

(1.0 val) 2. Calcule o valor do integral

$$\int_\gamma \frac{1}{1-\mathrm{i}z} dz$$

em que γ é a curva parametrizada por $z(\theta) = \sqrt{3}\, e^{\mathrm{i}\theta}$ com $-\pi \leq \theta \leq 0$.

3. Considere a função $g(z) = \dfrac{3z}{9+z^2}$ definida em $\mathbb{C} \setminus \{z : z^2 + 9 = 0\}$.

(1.0 val) (a) Obtenha o desenvolvimento em série de Maclaurin de g e indique o maior conjunto aberto onde esse desenvolvimento é válido.

(0.5 val) (b) Sendo n um inteiro positivo calcule $g^{(n)}(0)$.

4. Considere a função h definida no seu domínio por

$$h(z) = \frac{2z - \operatorname{sen}(2z)}{z(z+\pi)} + (z - 2\mathrm{i})\cos\left(\frac{1}{z-2\mathrm{i}}\right) \ .$$

(1.5 val) (a) Determine e classifique as singularidades de h, e calcule os respectivos resíduos.

(0.5 val) (b) Calcule

$$\int_\gamma h(z)\, dz,$$

onde a curva γ é parametrizada por $z(t) = 2i + e^{-it}/4$, com $0 \leq t \leq 6\pi$.

(1.0 val) 5. (a) Sejam g e h funções complexas, analíticas num ponto z_0 e tais que

$$g(z_0) \neq 0 \quad , \quad h(z_0) = 0 \quad , \quad h'(z_0) \neq 0 \ .$$

Mostre que a função $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ tem um pólo simples em z_0 e que

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \ .$$

(1.0 val) (b) Calcule o valor do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{4 + x^4} \, dx \ .$$