Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2015/2016

1º Teste, versão A

(Cursos: LEMat, MEAer, MEAmbi, MEBiol, MEEC, MEQ)

31 de Outubro de 2015, 11h

Duração: 1h 30m

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a função real $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(x, y) = x^2 - \alpha^2 y^2 + 2\alpha x \ .$$

(1 val) (a) Determine os valores de α para os quais v é a parte imaginária de uma função holomorfa em $\mathbb{C}$.

(1.5 val) (b) Considerando $\alpha = 1$, determine a função f holomorfa em $\mathbb{C}$ de modo a que $\operatorname{Im} f = v$ e $f(-1) = -\mathrm{i}$.

(1.0 val) (c) Sendo f a função que determinou na alínea anterior, calcule

$$\oint_\gamma \frac{e^{f(z)}}{(z+1)^2}\, dz$$

em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 2015\}$ percorrida uma vez em sentido directo.

(1.0 val) 2. Calcule o valor do integral

$$\int_\gamma \frac{1}{1 + \mathrm{i}z} dz$$

em que γ é a curva parametrizada por $z(\theta) = \sqrt{3}\, e^{\mathrm{i}\theta}$ com $0 \le \theta \le \pi$.

3. Considere a função $g(z) = \dfrac{2z}{4 + z^2}$ definida em $\mathbb{C} \setminus \{z : z^2 + 4 = 0\}$.

(1.0 val) (a) Obtenha o desenvolvimento em série de Maclaurin de g e indique o maior conjunto aberto onde esse desenvolvimento é válido.

(0.5 val) (b) Sendo n um inteiro positivo calcule $g^{(n)}(0)$.

4. Considere a função h definida no seu domínio por

$$h(z) = \frac{\operatorname{sen}(3z) - 3z}{z(z - \pi)} + (z - \mathrm{i}) \cos\left(\frac{2}{z - \mathrm{i}}\right) \ .$$

(1.5 val) (a) Determine e classifique as singularidades de h, e calcule os respectivos resíduos.

(0.5 val) (b) Calcule

$$\int_\gamma h(z)\, dz,$$

onde a curva γ é parametrizada por $z(t) = i + e^{-it}/4$, com $0 \le t \le 4\pi$.

(1.0 val) 5. (a) Sejam g e h funções complexas, analíticas num ponto z_0 e tais que

$$g(z_0) \neq 0 \quad , \quad h(z_0) = 0 \quad , \quad h'(z_0) \neq 0 \ .$$

Mostre que a função $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ tem um pólo simples em z_0 e que

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \ .$$

(1.0 val) (b) Calcule o valor do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+9} \, dx \ .$$