Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TODOS OS CURSOS EXECEPTO LEAMB, LEMAT, LQ, MEBIOL, MEQ,
TESTE 1 – 3 DE NOVEMBRO DE 2007

Resolução abreviada

(1) Considere

$$h(x,y) = \begin{cases} 2 + \dfrac{2x^2 - y^2}{3x^2 + y^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) a) Mostre que h não é contínua na origem.

Resolução:

Os limites direccionais na origem segundo rectas, $y = mx$, são diferentes para diferentes valores de m:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} h(x,y) = \lim_{x\to 0}\left(2 + \frac{2x^2 - m^2x^2}{3x^2 + m^2x^2}\right) = 2 + \frac{2-m^2}{3+m^2}.$$

Logo não existe o $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$ pelo que h não é contínua na origem.

(1 val.) b) Encontre uma recta $L \subset \mathbb{R}^2$ que passe na origem e tal que a restrição de h a L seja contínua na origem.

Resolução:

A restrição de h ao eixo Oy é a função constante $g(y) = h(0,y) = 1,\ y \in \mathbb{R}$, pelo que é contínua na origem.

(3 val.) (2) Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$f(x,y,z) = (x^2 - y, x + y^2 + z),$$

e a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que

$$Dg(0,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada de $g \circ f$ no ponto $(1,1,0)$, segundo o vector $v = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Resolução:

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial v}(1,1,0) = D(g\circ f)(1,1,0)\cdot v = Dg(0,2)\cdot Df(1,1,0)\cdot v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = 5/\sqrt{3}$$

(3) Considere o conjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ definido por:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 2 + z + e^x \\ x + y = 2. \end{cases}$$

(3 val.) a) Mostre que C é uma variedade e determine a sua dimensão.

Resolução:
C coincide com o conjunto de nível zero da função de classe C^1, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y,z) = (y^2 - x^2 - 2 - z - e^x, x + y - 2).$$

A derivada de F,

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x - e^x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tem $\mathrm{car} DF(x,y,z) = 2, \forall (x,y,z) \in C$ (de facto $\mathrm{car} DF(x,y,z) = 2, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$) uma vez que a submatriz quadrada 2×2, $D_{yz}F(x,y,z)$ tem determinante diferente de zero

$$\det(D_{yz}F(x,y,z)) = \begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Portanto C é uma variedade e a sua dimensão é $\dim(C) = 3 - 2 = 1$.

b) Determine um vector não nulo normal a C no ponto $P = (0,2,1)$. (2 val.)
Resolução:
Em primeiro lugar $F(0,2,1) = (4 - 2 - 1 - 1, 2 - 2) = (0,0)$ pelo que $P \in C$. O espaço vectorial normal a C em P é gerado pela linhas de $DF(P)$,

$$DF(0,2,1) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um vector normal não nulo é então, por exemplo, $v = (-1,4,1) \in \mathscr{L}\{(-1,4,1),(1,1,0)\}$.

c) Mostre que, numa vizinhança do ponto $P = (0,2,1)$, o sistema define x e y como funções de z, de classe C^1. Calcule $y'(1)$. (2 val.)
Resolução:
Vimos que F é de classe C^1 e $F(0,2,1) = (0,0)$. Para $\det(D_{xy}F(0,2,1))$ temos,

$$\det(D_{xy}F(0,2,1)) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Estamos portanto nas condições do teorema da função implícita pelo que existe uma vizinhança do ponto $(0,2,1)$ na qual o sistema define x e y como funções de classe C^1 de z. Temos também que a derivada da função implícita é dada por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} &= -\left(D_{xy}F(0,2,1)\right)^{-1} \; D_zF(0,2,1) = -\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4) Considere o conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

e o campo escalar dado por $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + (z^2 - 4)^2$.

(2 val.) a) Determine os pontos críticos de f no interior de B e classifique-os.

Resolução: Os pontos críticos no interior de B satisfazem:

$$\nabla f(x, y, z) = (4x, 6y, 4z(z^2 - 4)) = (0, 0, 0).$$

Das 3 soluções $(0, 0, 0), (0, 0, 2), (0, 0, -2)$, só a origem está no interior de B. Temos a Hessiana de f na origem,

$$H_f(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix},$$

logo, havendo valores próprios positivos e negativos, $(0, 0, 0)$ é um ponto em sela.

(2 val.) b) Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em B.

Resolução: Falta estudar os extremos de f na fronteira de B. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, esses pontos serão soluções do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \\ 4x & = & 2\lambda x \\ 6y & = & 2\lambda y \\ 4z(z^2 - 4) & = & 2\lambda z. \end{cases}$$

As seis soluções são $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$. Temos $f(\pm 1, 0, 0) = 18, f(0, \pm 1, 0) = 19, f(0, 0, \pm 1) = 9$. Sendo B compacta sabemos que f terá máximo e mínimo em B. Como estes não estão no interior de B têm de estar na fronteira. Logo, $(0, \pm 1, 0)$ são máximos e $(0, 0, \pm 1)$ são mínimos.

(3 val.) (5) Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde $D = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 3\}$, uma função de classe C^1 tal que $||\nabla f(x)|| \leq 1, \forall x \in D$. Mostre que

$$|f(x) - f(y)| < 6, \ \forall x, y \in D.$$

Resolução:

Sejam $x, y \in B$ e $L \subset B$ o segmento de recta entre eles. Pelo teorema de Lagrange existe um ponto $w \in L$ tal que

$$f(x) - f(y) = \nabla f(w) \cdot (x - y).$$

Temos então

$$|f(x) - f(y)| \leq ||\nabla f(w)|| ||x - y|| \leq ||x|| + ||y|| < 6.$$