Os Teoremas Fundamentais do Cálculo

Manuel Ricou

IST, 1 de Fevereiro de 2010

O que são os TFC's?

Para já, um pretexto para discutirmos algumas das questões mais básicas e mais antigas da Matemática,

Alguns passos fundamentais:

- Antiguidade Clássica: sobretudo Arquimedes (π, a parábola, ...)
- Século XVII (Newton, Leibnitz): Derivadas e integrais, aparecem os TFC's
- Século XIX (Cauchy, Riemann): As primeiras definições, papel de Fourier
- Século XX (Borel, Lebesgue): A teoria moderna, desenvolvimentos recentes (XXI)

O que são os TFC's?

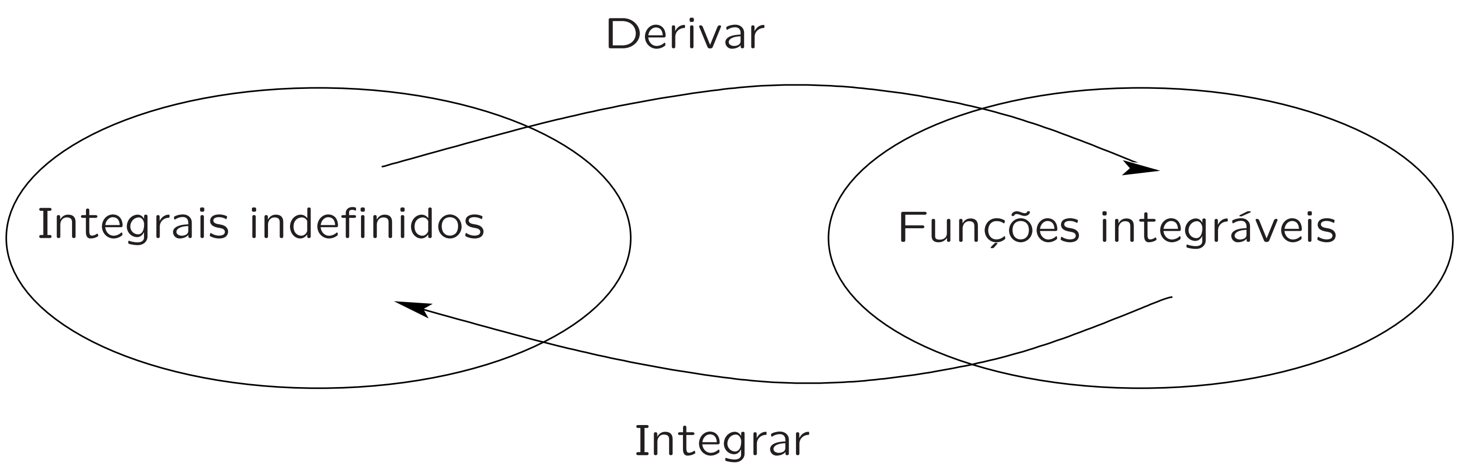
1º TFC: A derivada do integral de f é f,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f = f$$

2º TFC, ou Regra de Barrow: O integral da derivada de f é f,

$$\int_a^b \frac{df}{dx} = f(b) - f(a)$$

O que são os TFC's?



Qual é a efectiva base teórica destes resultados?

- Os usuais argumentos 'elementares/intuitivos' sobre a diferenciabilidade dos integrais indefinidos usam a continuidade de f.

- A questão do integral da derivada é usualmente esclarecida supondo que a integranda é a derivada da primitiva em todos os pontos da região de integração.

O 1º TFC não é trivial,

- Em geral,
  - A derivada do integral de f não é igual a f em todos os pontos.
  - O integral de f não é diferenciável em todos os pontos.

O 2^{o} TFC muito menos!

- Mesmo que f seja diferenciável em toda a parte, a sua derivada não é necessariamente somável:

- A regra de Barrow pode ser verdadeira em casos onde f não é diferenciável em todos os pontos, mas mesmo quando f é diferenciável em todos os pontos, a derivada f' pode não ter integral!

Integrar $\neq$ Primitivar

Alguns exemplos interessantes:

- A função de Riemann

- A função $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)$

- A função de Dirichlet: mas afinal o que é o integral? A definição de Cantor

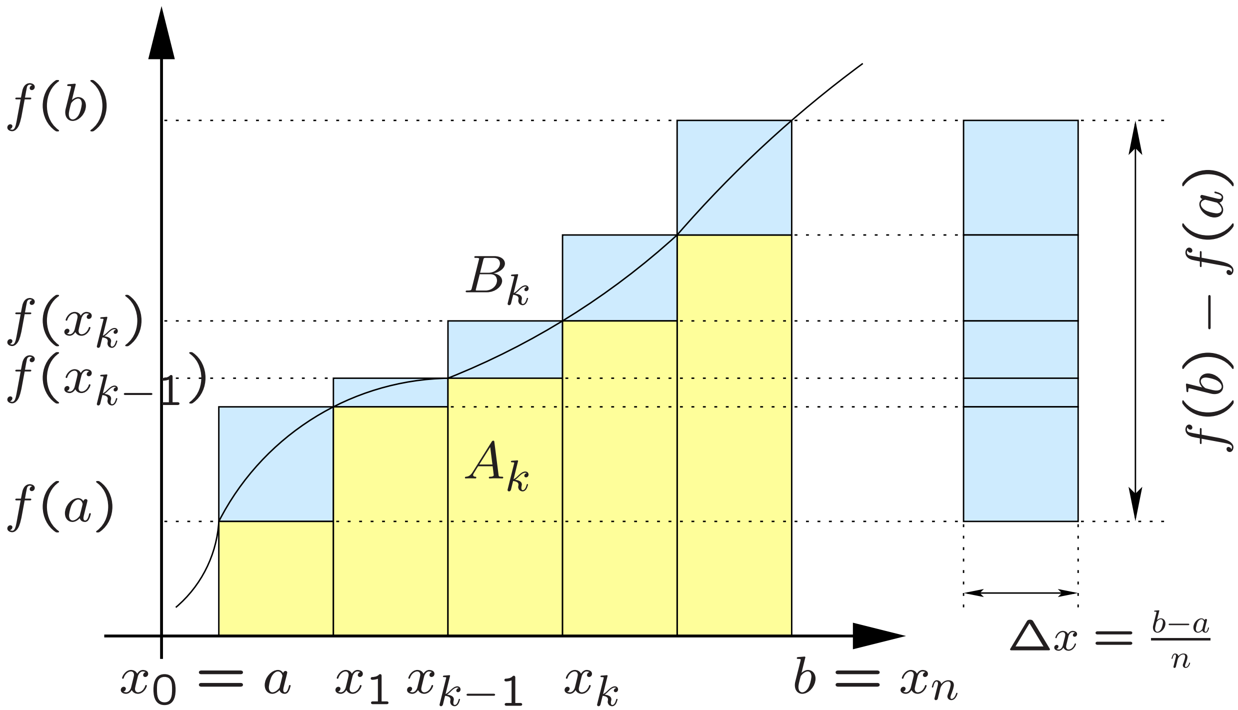
As técnicas de definição:

- Definições “geométricas”

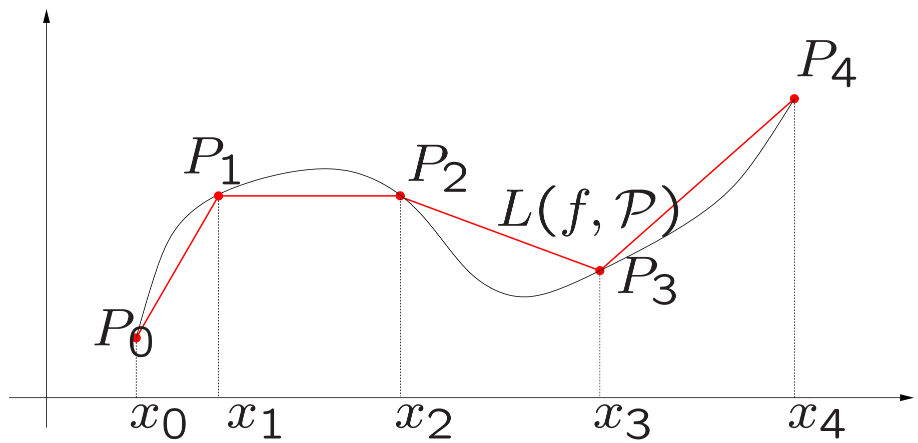
- As somas (de Riemann, de Darboux)

- Integrais e primitivas

A definição de Riemann/Cauchy



A questão do comprimento de arco



As funções que são integrais têm gráficos rectificáveis: funções de variação limitada.

A definição de Riemann/Cauchy

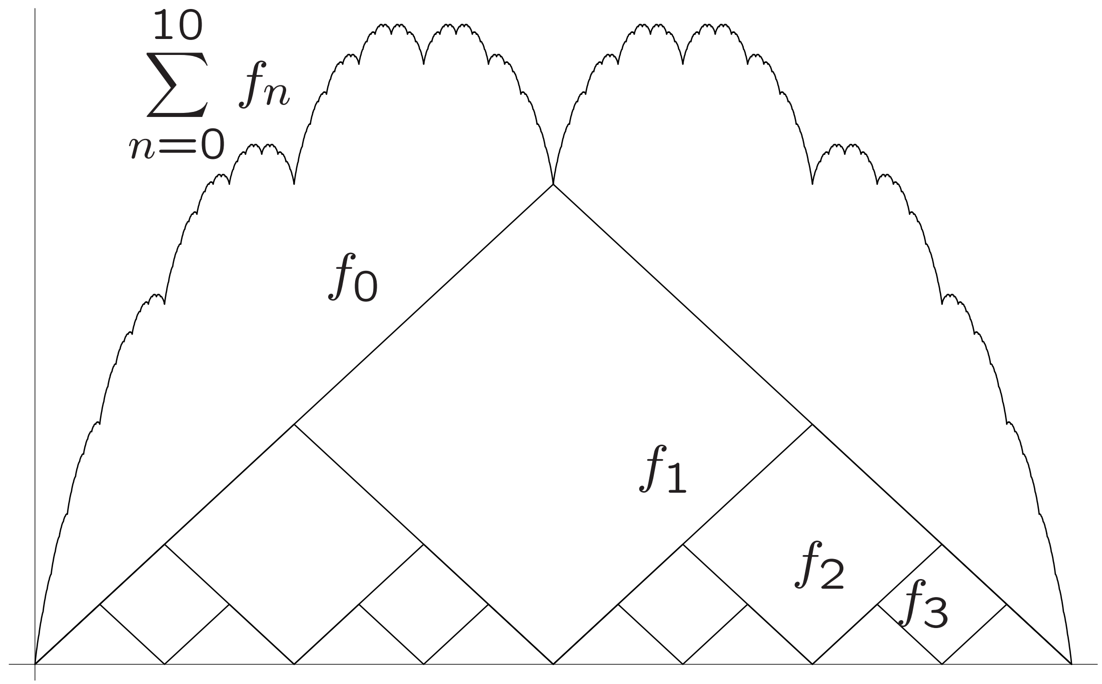
- Integrabilidade de funções monótonas (descontinuidades?)

- Relação com continuidade

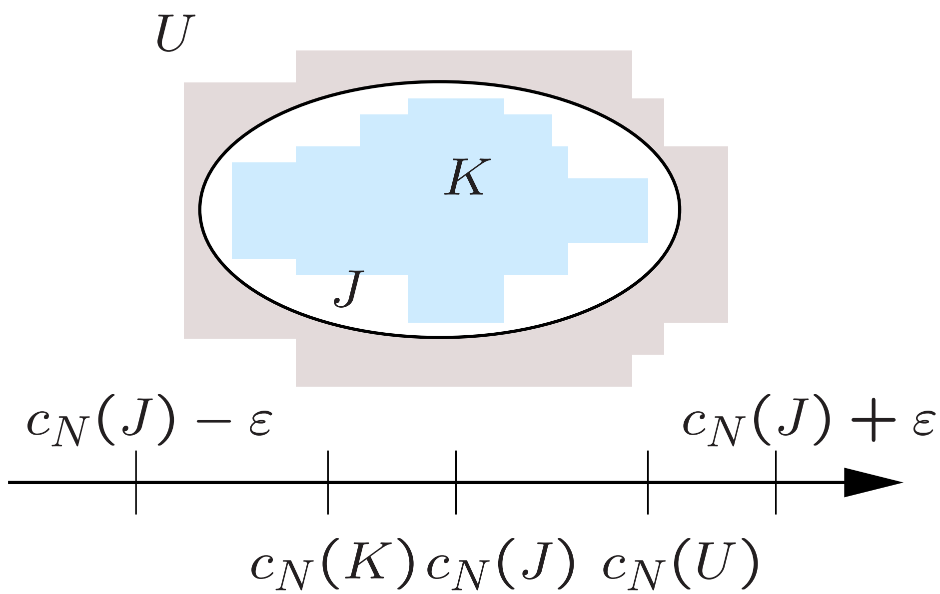
- Os TFC's na teoria de Riemann

- Os conjuntos "nulos"

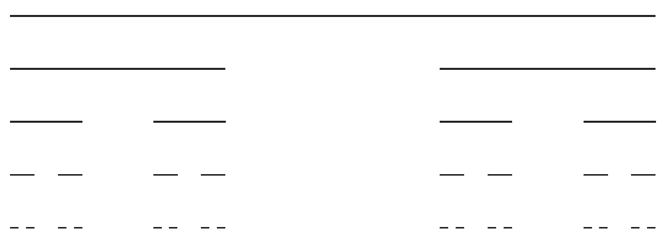
A questão da diferenciabilidade



Definições geométricas

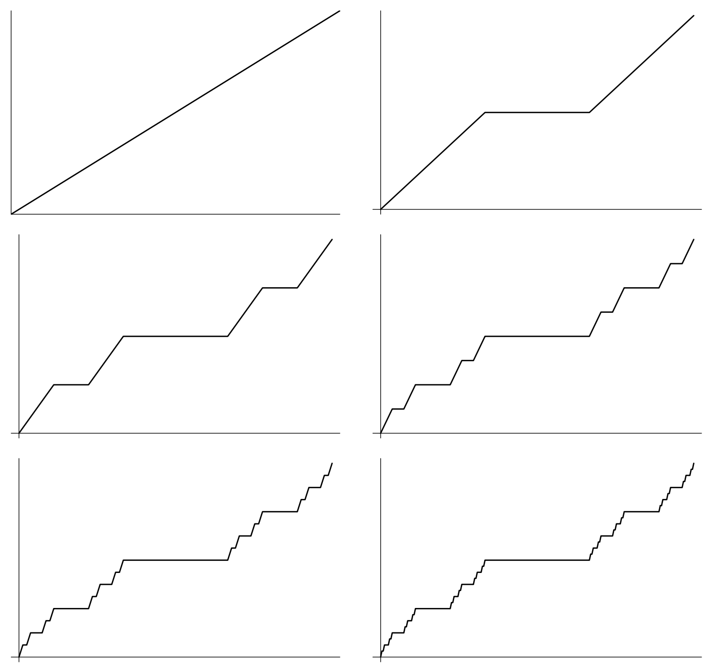


O conjunto de Cantor

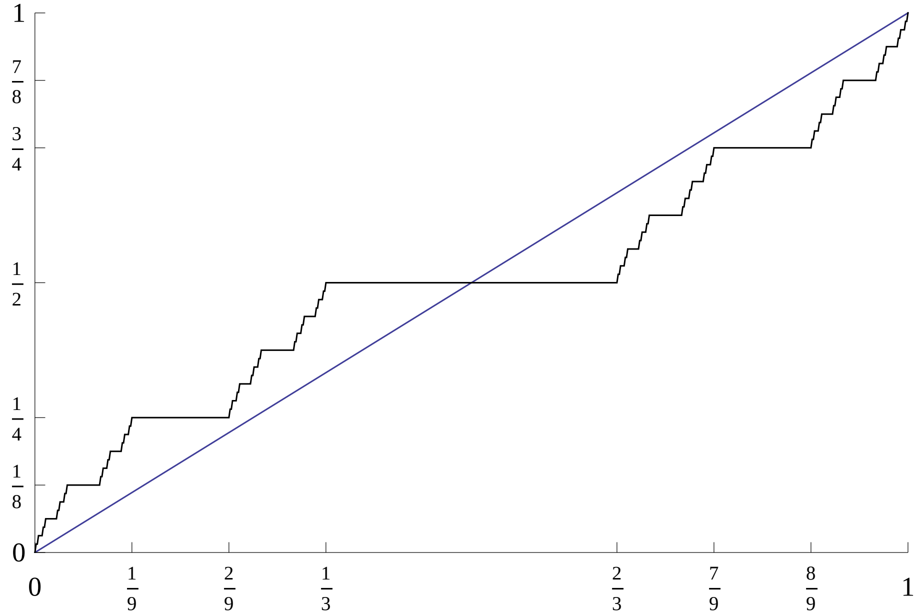


$$F_0 = I = [a, b]$$
$$F_1 = F_0 \backslash U_0$$
$$F_2 = F_1 \backslash U_1$$
$$F_3 = F_2 \backslash U_2$$
$$F_4 = F_3 \backslash U_3$$

A função F de Cantor-Lebesgue



A função de Cantor-Lebesgue



A função de Cantor-Lebesgue

- F é contínua em toda a parte

- O gráfico de F é rectificável

- F é diferenciável excepto num conjunto “pequeno” (de Cantor)

- A derivada F' é uma função integrável

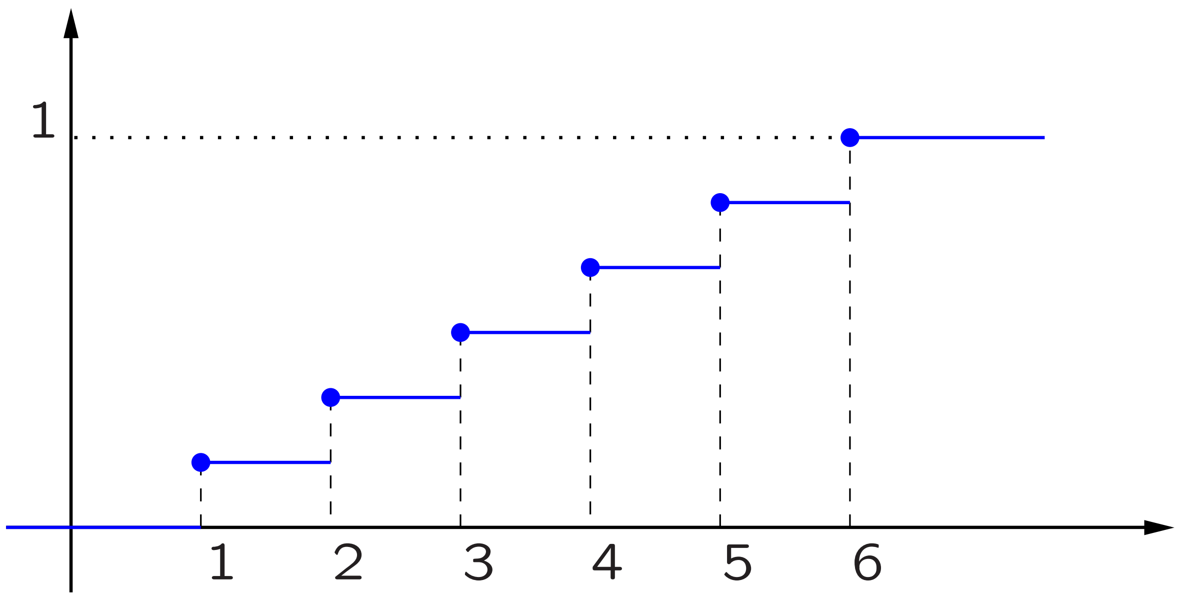
- Mas F não é o integral da sua derivada F'.

O que é a medida de um conjunto?

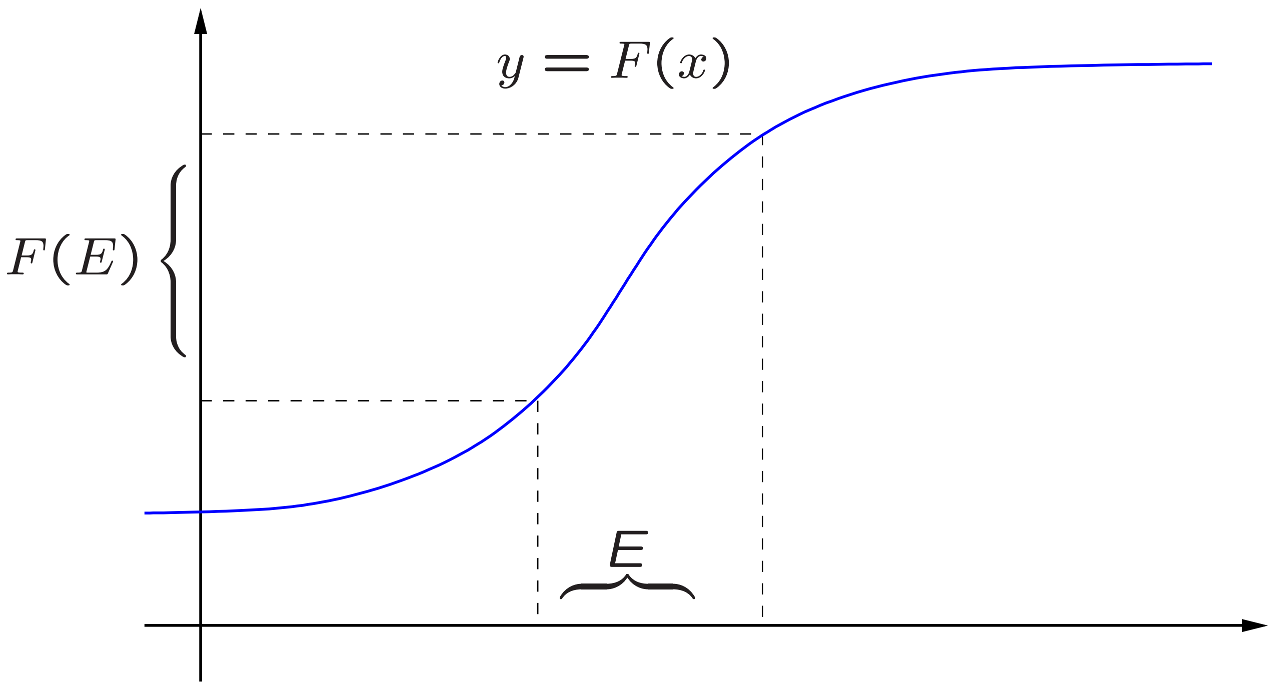
- O exemplo de Cantor, versão Volterra
- A σ-aditividade, versão Borel
- Conjuntos abertos, e teorema de Cantor
- O problema de Borel

A medida e o integral de Lebesgue

- A medida dos abertos e dos fechados
- Medida interior e exterior
- Os conjuntos Lebesgue-mensuráveis
- As funções Lebesgue-mensuráveis, um exemplo "exótico"
- Medidas em geral, caso dos integrais indefinidos


1
1
2
3
4
5
6

Funções contínuas crescentes e medidas



- O Problema de Stieltjes: Dado $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinar uma medida μ, necessariamente definida pelo menos em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, tal que

$$\mu(]a,b]) = f(b) - f(a).$$

- μ diz-se a derivada generalizada de f. Exemplos: Se $f(x) = x$, então $\mu = m$; se f é a função de Heaviside, então $\mu = \delta$.

- A função f satisfaz a regra de Barrow se e só se tem derivada generalizada μ, e μ é o integral indefinido da derivada usual f'.

Continuidade Absoluta

Quais são as medidas que são integrais indefinidos?

- Se μ é um integral indefinido, então $m(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$.
- Se $m(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$, μ diz-se absolutamente contínua.
- Se μ é um integral indefinido, então μ é absolutamente contínua.

Funções absolutamente contínuas

Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se os intervalos $]x_k, y_k[$ são disjuntos,

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k) < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

O Problema de Stieltjes

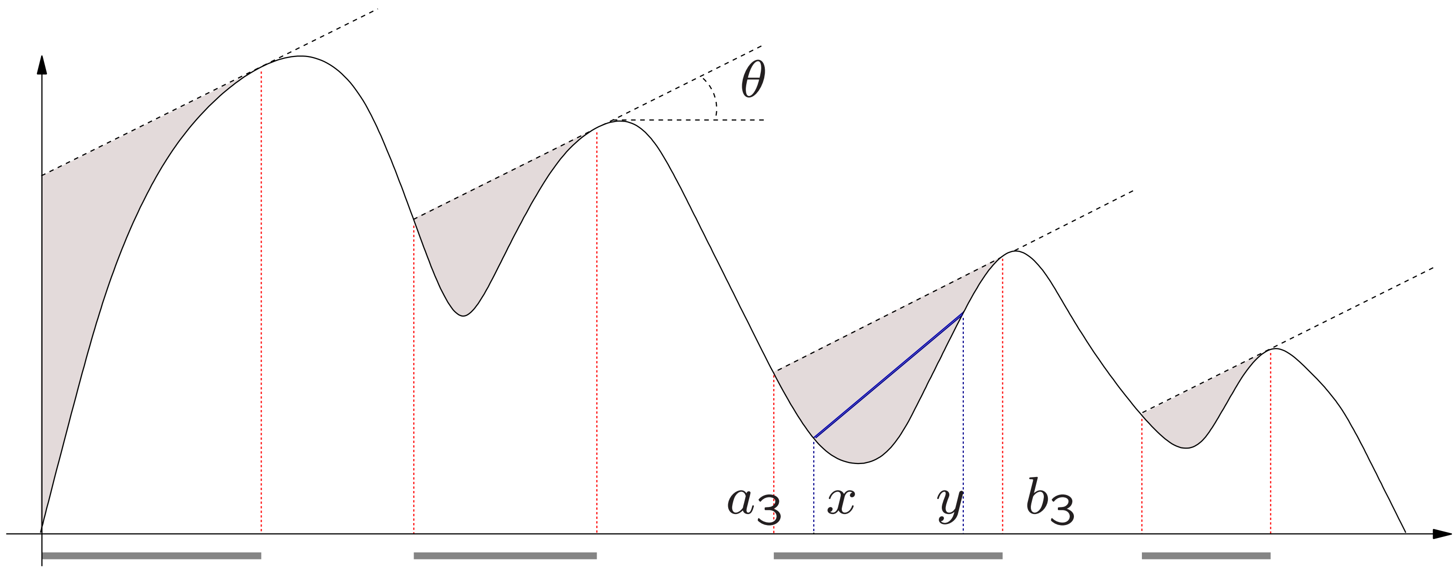
- Se f é contínua e crescente a solução (CR) do problema de Stieltjes é:

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq \mathbb{R} : f(E) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})\}, \mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}, \mu(E) = m(f(E))$$

- Qualquer função contínua e crescente tem derivada generalizada.

- Essa derivada pode não ser um integral indefinido, por não ser absolutamente contínua. No exemplo de Cantor-Lebesgue, temos $f(C) = [0, 1]$, i.e., existe E com $m(E) = 0$ e $m(f(E)) > 0$.

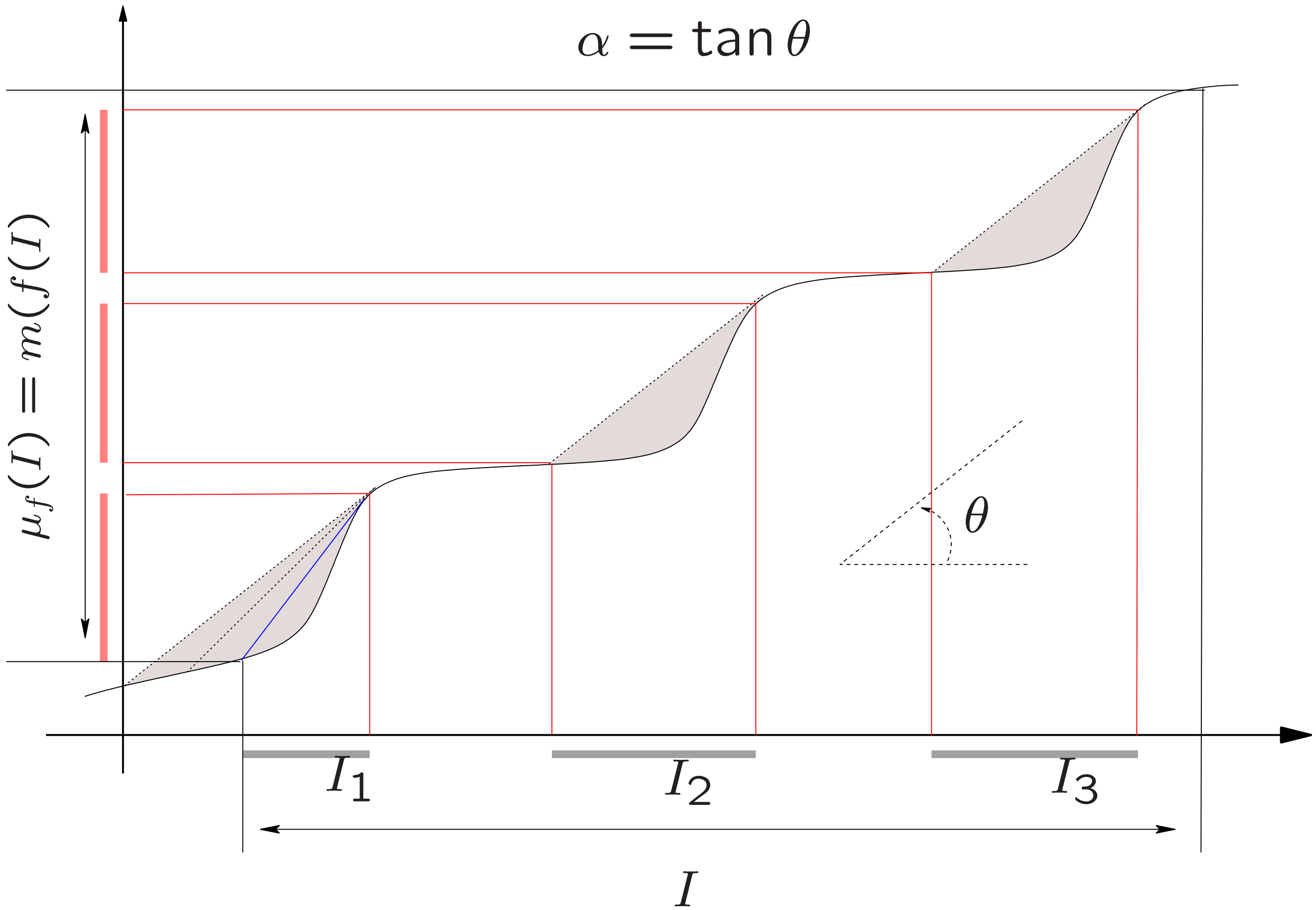
O Lema de Riesz (1)



O Lema de Riesz - do Sol Nascente - I

Se $M_\alpha(I) = \{x \in I : \exists y \in I, y > x, \frac{f(y)-f(x)}{y-x} > \alpha > 0\}$, então $M_\alpha(I) = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[$ é aberto, e $\alpha(b_n - a_n) \leq f(b_n) - f(a_n)$.

E se f é crescente?



$\alpha = \tan\theta$
$\mu_f(I) = m(f(I))$
θ
I_1
I_2
I_3
I

Se f é crescente...

O conjunto $M_\alpha(I)$ não é arbitrariamente grande, porque a sua medida não pode exceder $m(f(I))/\alpha$.

$$m(f(I)) \geq m(f(M_\alpha(I)) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f(I_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} [f(b_n) - f(a_n)] \geq$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(b_n - a_n) = \alpha m(M_\alpha(I))$$

As derivadas de Dini

São quatro limites (à esquerda, à direita, superior e inferior) associados ao cálculo da derivada de f em cada ponto x:

As derivadas de Dini de f são as funções $f'_{s+}, f'_{i+}, f'_{s-}, f'_{i-} : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ dadas por:

$$f'_{s+}(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, f'_{i+}(x) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'_{s-}(x) = \limsup_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, f'_{i-}(x) = \liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Consequências directas do(s) lema(s) de Riesz

- Se $f'_{s+}(x) \geq \alpha$ para $x \in E$ então $m^*(f(E)) \geq \alpha m^*(E)$

- Se $f'_{i-}(x) \leq \beta$ para $x \in E$ então $m^*(f(E)) \leq \beta m^*(E)$

- Analogamente para f'_{s-} e f'_{i+}.

- Comparar com o clássico teorema de Lagrange...

O Teorema de Diferenciação de Lebesgue

- $f'_{s+}(x) < \infty$ qtp.

- Se $f'_{i-}(x) \leq \beta < \alpha \leq f'_{s+}(x)$ para $x \in E$ então $m^*(f(E)) = m^*(E) = 0$.

- Se $f'_{i+}(x) \leq \beta < \alpha \leq f'_{s-}(x)$ para $x \in E$ então $m^*(f(E)) = m^*(E) = 0$.

O Teorema de Diferenciação de Lebesgue

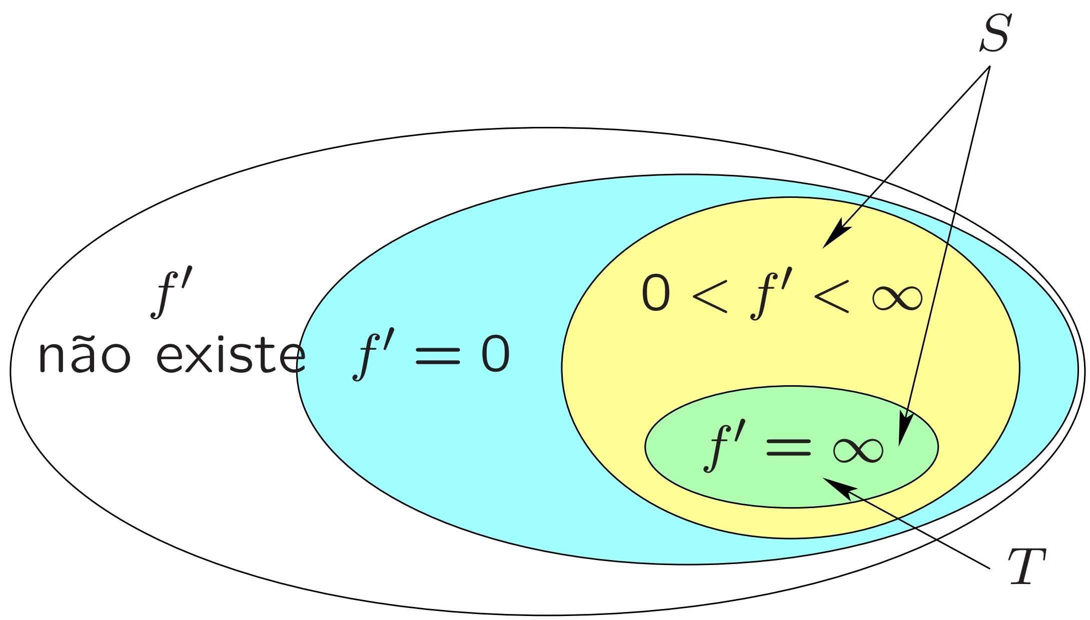
- $f'_{s+}(x) \leq f'_{i^-}(x) \leq f'_{s^-}(x) \leq f'_{i+}(x) \leq f'_{s+}(x) < +\infty$, qtp, *i.e.*, qualquer função contínua e crescente é diferenciável qtp.

- Se $\beta \leq f'(x) \leq \alpha$ para $x \in E$, então $\beta m^*(E) \leq m^*(f(E)) \leq \alpha m^*(E)$.

- Se f' não existe em E então $m^*(E) = m^*(f(E)) = 0$.

- Qualquer integral indefinido é diferenciável qtp.

Decomposição de Lebesgue - 1



Decomposição de Lebesgue - 2

$$\mu(E) = m(f(E)) = \mu(E \cap (S \backslash T)) + \mu(E \cap T) = \int_E f'(x)dx + \nu(E)$$

A regra de Barrow é válida $\iff \nu = 0$, ou seja, se e só se f é absolutamente contínua (e o comprimento do gráfico?).

Regra de Barrow válida quando?

f contínua e crescente satisfaz a Regra de Barrow, por exemplo, se

- É diferenciável em toda a parte,
- É diferenciável, excepto num conjunto numerável,
- 2º FTC: Se f é absolutamente contínua.
- Teorema de Rademacher: Se f satisfaz uma condição de Lipschitz, então é diferenciável qtp.

E o 1º FTC?

Agora pouco menos que trivial:

Se g é somável e $f(x) = \displaystyle\int_a^x g$, então.

- O integral indefinido de g é o integral indefinido de f', logo
- 1º FTC: $f'(x) = g(x)$, qtp.

Para referência: os FTC's em $\mathbb{R}$

1. Se g é localmente somável e $f(x) = \int_a^x g + C$, então

$$f \text{ é absolutamente contínua, e } f' = g, \text{ qtp.}$$

2. Se f é absolutamente contínua então existe uma função g tal que

$$g \text{ é localmente somável, } f' = g \text{ qtp e } f(x) = \int_a^x g + C.$$

Os FTC's em $\mathbb{R}$