

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 7

(Caminhos fechados homotópicos. Teorema de Green. Teorema da Divergência. Teorema de Stokes)
(21-5-08)

1. Considere o campo vectorial

$$h(x, y, z) = \left(\frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2} + yz, \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} + xz, xy \right).$$

- Diga justificadamente se h é fechado no seu domínio.
- Calcule o trabalho de h ao longo da elipse definida por $2(x-1)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, percorrida no sentido anti-horário de um observador colocado no ponto $(1, 0, 1)$.
- Calcule o trabalho de h ao longo da circunferência definida por $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, $z = 0$.
- Será h conservativo no seu domínio? Em caso negativo, indique uma região onde o seja.

2. Considere o campo vectorial

$$f(x, y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{-(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right).$$

- Será f conservativo no seu domínio?
 - Calcule o trabalho realizado por f ao longo da circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 = 100$, percorrida no sentido anti-horário.
3. Considere o campo vectorial $g(x, y) = (-\frac{1}{3}y^3, \frac{1}{3}x^3)$ e a circunferência Γ dada pela equação $x^2 + y^2 = 10$ e orientada no sentido horário. Calcule o trabalho realizado por g ao longo de Γ .
4. Use o Teorema de Green para calcular a área de uma elipse definida por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, em que $a, b > 0$.

5. Considere a superfície

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{x^2 + z^2}, 0 < y < 1\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_y > 0$. Seja $f(x, y, z) = (x, -y, 0)$. Calcule pela definição o fluxo $\int_E f \cdot n$.

6. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3 - 3x^2 - 3z^2, y > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_y > 0$. Seja $f(x, y, z) = (0, y^2, -2yz)$. Calcule o fluxo $\int_S f \cdot n$ pela definição.

7. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, -1 < z < 1\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$ nos pontos de S com coordenada $z > 0$. Seja $f(x, y, z) = (\cos(yz) + 2x, x^3 + y, z + 1)$. Calcule o fluxo de f através de S no sentido de n , $\int_S f \cdot n$.

8. Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x, y, z) = (x^3, y^3, z)$ através do cone definido por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < z < 1$, orientado com a normal n com terceira componente positiva.

9. Considere a superfície

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z < 0$. Seja $h(x, y, z) = (y^2 + x, x^2 + y, 2z)$. Calcule o fluxo $\int_A h \cdot n$.

10. Calcule o volume da bola esférica de raio r usando o teorema da divergência.

11. Utilizando o teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $h(x, y, z) = (-y, x, 3)$ ao longo da elipse definida pelas equações $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{30} = 1$; $z = 0$ e orientada no sentido horário quando vista do ponto $(0, 0, 10)$.

12. Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y + \operatorname{sen} x, \cos y, z^3)$$

ao longo do caminho

$$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t); \quad t \in [0, 2\pi].$$

13. Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1, z > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$. Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $g(x, y, z) = (0, 0, 2)$ através de M no sentido de n .

14. Considere a superfície

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{x^2 + z^2}, 0 < y < 1\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_y > 0$. Seja $f(x, y, z) = (x, -y, 0)$. Calcule o fluxo $\int_E f \cdot n$:

- Pelo teorema da divergência.
- Pelo teorema de Stokes.

(Compare com o valor obtido no Exercício 5)

15. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3 - 3x^2 - 3z^2, y > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_y > 0$. Seja $f(x, y, z) = (0, y^2, -2yz)$. Calcule o fluxo $\int_S f \cdot n$:

- Pelo teorema da divergência.
- Pelo teorema de Stokes.

(Compare com o valor obtido no Exercício 6)

16. Considere a superfície

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1\},$$

orientada com a normal n tal que $n_z < 0$. Seja $f(x, y, z) = (-y, x, 1)$. Calcule o fluxo $\int_A f \cdot n$:

- Pela definição.
- Pelo teorema da divergência.
- Pelo teorema de Stokes.