

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 6

(Integrais de Campos Escalares em Variedades. Trabalho. Campos Gradientes. Potenciais)

1. Descreva as seguintes variedades parametricamente:

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \tan x; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; y > |x|; |z| < 2\}$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 1; z > 0\}$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z > \frac{1}{2}\}$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1; |z| < 1\}$.

2. Calcule o comprimento do arco de curva $y^2 = x^3$ entre os pontos $(1, 1)$ e $(4, 8)$.

3. Calcule a área do cilindro dado pelas equações $x^2 + y^2 = 1$ e $0 \leq z \leq 2$.

4. Calcule a área da superfície

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{3}|y| < |x|, z > 0\}.$$

5. Considere a variedade-1 definida por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, 2x + 2y + z = -1\},$$

e com densidade de carga eléctrica por unidade de comprimento dada por

$$\alpha(x, y, z) = \sqrt{5 - 8(x+1)(y+1)}.$$

Calcule a carga eléctrica total de C .

6. Considere a variedade-2

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x^2 + y^2)^2, x^2 + y^2 < 1\},$$

com densidade de massa dada por $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)^3}$. Calcule a massa total de S .

7. Considere a superfície

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy, 1 < x < 2, 1 < y < 2\},$$

com densidade de massa dada por $\alpha(x, y, z) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}$. Calcule o momento de inércia de B relativamente ao eixo Ox .

8. Considere o campo vectorial $f(x, y) = (-y, x)$.

- Calcule o trabalho realizado pelo campo f ao longo da elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário.
- Calcule o trabalho realizado por f ao longo da linha poligonal que une os pontos $(1, 0)$, $(0, 0)$ e $(0, 1)$.

- c) Represente geometricamente o campo f e, sem efectuar os cálculos, confirme o resultado da alínea anterior.
9. Calcule o trabalho do campo vectorial $h(x, y, z) = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2)$ ao longo do caminho $g(t) = (t, t^2, t), t \in]-1, 1[$.
10. Considere os campos vectoriais seguintes:

$$\begin{cases} f(x, y) &= (x - y, x - 2), \\ g(x, y) &= (3 + 2xy, x^2 - 3y^2). \end{cases}$$

Determine se f e g são ou não conservativos. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

11. Considere os campos vectoriais seguintes:

$$\begin{cases} f(x, y, z) &= (e^x, e^y, e^z), \\ g(x, y, z) &= (e^{yz}, xze^{yz}, xye^{yz}), \\ h(x, y, z) &= \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, z \right). \end{cases}$$

- a) Determine se f, g e h são ou não conservativos. Em caso afirmativo, calcule um potencial.
- b) Calcule o trabalho de f, g e h ao longo da curva definida pelas equações $y = x^3, z = 0$, percorrida desde o ponto $(0, 0, 0)$ até ao ponto $(1, 1, 0)$.
12. Calcule o trabalho de $f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$ ao longo da elipse definida por $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{20} = 1$, percorrida no sentido anti-horário. Será f um gradiente no seu domínio ?