Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 5

(Teorema de Fubini. Mudança de Variáveis de Integração) (18-04-08)

1. Calcule $\int\int_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$ onde $R=[-1,1]\times[0,1]$.
2. Calcule $\int\int_R (y\cos x+2)\,dx\,dy$, onde $R=[0,\pi/2]\times[0,1]$.
3. Calcule $\int\int\int_R (x+2y+3z)^2\,dx\,dy\,dz$, onde $R=[0,1]\times[-1/2,0]\times[0,1/3]$.
4. Calcule
$$\int_0^3\left(\int_{-x^2+1}^{x^2+1} xy\,dy\right)dx.$$
5. Invertendo a ordem de integração, calcule
$$\int_0^1\left(\int_{3y}^{3} e^{x^2}\,dx\right)dy.$$
6. Invertendo a ordem de integração, calcule
$$\int_0^1\left(\int_0^{\operatorname{arcsen} y} y\operatorname{sen} x\,dx\right)dy.$$
7. Calcule
$$\int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_{x^2+y^2}^2 3\,dz\right)dy\right)dx.$$
Esboce a região de integração.
8. Considere a região
$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y+2z\le 1,\ x+y-2z\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}.$$
Escreva uma expressão para o volume de V na forma
$$\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\cdots dx\right)dy\right)dz,$$
e calcule-o.
9. Considere a região
$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\}.$$
Escreva expressões para o volume de U na forma:
   a) $\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\cdots dx\right)dy\right)dz$.
   b) $\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\cdots dz\right)dy\right)dx$.
10. Considere a região
$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \frac{x}{2}\le y\le x,\ 0\le z\le x,\ x\le 1\}.$$
Escreva expressões para o volume de A na forma:

a) $\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\cdots dz\right)dy\right)dx$.

b) $\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\cdots dx\right)dy\right)dz$.

11. Considere a região

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\, x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\},$$

com densidade de massa dada por $\alpha(x, y, z) = z^2$.

a) Escreva uma expressão para a coordenada z do centro de massa de V utilizando integrais da forma

$$\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\cdots dx\right)dy\right)dz.$$

b) Calcule a massa total de V.

c) Calcule a coordenada z do centro de massa de V.

12. Considere a região

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\, z^2 \leq x^2 + y^2,\, x \geq 0, y \geq 0\},$$

com densidade de massa dada por $\alpha(x, y, z) = (x^2 + y^2)z^2$.

a) Calcule a massa de U utilizando coordenadas esféricas e coordenadas cilíndricas.

b) Calcule o momento de inércia de U relativamente ao eixo Oz.

13. Calcule o volume da região $B \subset \mathbb{R}^3$ definida pelas condições

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 4 - 2(x^2 + y^2), & \text{se} \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 3 - (x^2 + y^2), & \text{se} \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3. \end{cases}$$

14. Utilizando coordenadas polares, calcule a área da região

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq 1\}.$$

15. Considere o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1,\, 0 < y < x\},$$

e seja $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = e^{-(x+y)^4}(x^2 - y^2)$.

Calcule $\int_D f$ utilizando uma transformação de coordenadas apropriada. Justifique cuidadosamente.

16. Considere o sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + z^2 \leq 4,\, 0 \leq y \leq (x^2 + z^2)^{\frac{1}{4}},\, x \geq 0, z \geq 0\},$$

com densidade de massa dada por $\alpha(x, y, z) = e^y$. Calcule a massa total de S.

17. Calcule o volume da região

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0\}.$$