

## Cálculo Diferencial e Integral II

### Ficha de trabalho 4

(Variedades. Espaço Tangente. Espaço Normal. Extremos Condicionados)

1. Mostre que cada um dos conjuntos seguintes é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

- a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$ .
- b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \tan x; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$ .
- c)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; y > |x|; |z| < 2\}$ .
- d)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$ .
- e)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 1; z > 0\}$ .
- f)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z > \frac{1}{2}\}$ .
- g)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1; |z| < 1\}$ .

2. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x = y, x > 0\}.$$

- a) Mostre que  $A$  é uma variedade e determine a sua dimensão.
  - b) Determine um vector tangente a  $A$  no ponto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .
3. Determine a recta normal e o plano tangente ao cone

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

no ponto  $(3, 4, -2)$ .

4. Determine o espaço tangente e o espaço normal à variedade

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; z = x^2 - y^2\},$$

no ponto  $(1, 0, 1)$ .

5. Determine o espaço tangente e o espaço normal à variedade

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2; x^2 + y^2 < 2\},$$

no ponto  $(1, 0, 1)$ .

6. Para cada um dos casos seguintes, determine os extremos da função  $f$  no conjunto  $S$ :

- a)  $f(x, y, z) = x + y + z, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2; x + z = 1\}$ .
- b)  $f(x, y, z) = xyz, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

7. Use o Método dos Multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos de máximo da função  $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$  no disco de raio 1 e centro na origem de  $\mathbb{R}^2$ .

8. Determine os extremos absolutos da função  $f(x, y, z) = x + y - z$  que se encontram na bola  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

9. As faces de uma caixa rectangular sem tampa têm área total igual a  $16 \text{ m}^2$ . Determine as dimensões da caixa que maximizam o respectivo volume.

10. Determine os extremos da função  $yx + yz$  na superfície definida por  $xyz = 1$ .