Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 3

(Derivadas (cont.). Extremos. Função Inversa. Função Implícita) (20/03/08)

1. Calcule um vector normal ao gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ no ponto $(1,0)$. Escreva a equação do plano tangente a $z = f(x,y)$ neste ponto.

2. Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0\}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \log\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Aplique o Teorema de Lagrange para provar que
$$\log\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1 - \frac{2}{x+y}, \quad x + y \leq 2.$$
Sugestão: Considere $a = (x,y)$ e $b = (1,1)$.

3. Calcule o gradiente e a matriz Hessiana de cada uma das funções seguintes:
   a) $f(x,y) = x \arctan(\frac{x}{y})$
   b) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$
   c) $f(x,y,z) = e^{xz} \tan(yz)$

4. Obtenha os polinómios de Taylor de primeira e segunda ordem da função $f(x,y) = e^{x+y}$ no ponto $(0,0)$. Obtenha valores aproximados de $f(1,3)$ usando estes polinómios. Compare os valores obtidos com o valor exacto da função. Indique o erro cometido.

5. Mostre que o potencial de Newton $V = -\dfrac{GMm}{r}$, em que $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, verifica a equação de Laplace:
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0\,; \quad (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

6. Seja $w = f(x+y, x-y)$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2. Mostre que se tem
$$4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$
em que $u = x + y$ e $v = x - y$.

7. Determine e classifique os pontos de estacionaridade de cada uma das funções seguintes:
   a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$
   b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$
   c) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$
   d) $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$
   e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$

8. Para cada um dos casos seguintes determine o conjunto dos pontos do domínio de f em que o respectivo Jacobiano é não nulo. Determine se f é injectiva no respectivo domínio. Descreva o conjunto $f(S)$. Se f for injectiva em S, determine f^{-1} explicitamente.
   a) $f(x,y) = (x+2y, x-y)\,, \quad S = \mathbb{R}^2.$
   b) $f(x,y) = \left(\log xy, \dfrac{1}{(x^2+y^2)}\right)\,, \quad S = \{(x,y) : 0 < y < x\}.$

9. O tempo t e as coordenadas (x, y) de um ponto em movimento no plano satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & e^{2t} + 1 \\ x \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) & = & t. \end{cases}$$

   a) Mostre que este sistema define, numa vizinhança do ponto $(t_0, x_0, y_0) = (1, 1, e)$, uma função de classe C^1, dada por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

   b) Calcule $\alpha'(1)$.

10. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} u & = & xy + \operatorname{sen}(x + y) \\ v & = & e^{-x+y-2} + \frac{x}{y}. \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(u, v) = (-1, 0)$ e uma vizinhança de $(x, y) = (-1, 1)$ em que o sistema define (x, y) como função, de classe C^1, de (u, v) e calcule $\dfrac{\partial x}{\partial u}(-1, 0)$.

11. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$.

   a) Mostre que f não é injectiva.

   b) Determine, justificadamente, o conjunto de pontos em que f tem inversa local.

   c) Determine a matriz Jacobiana, no ponto $(2, 0)$, de uma das funções inversas locais f^{-1} da função f.

12. Mostre que a equação $x \cos(xy) = 0$ define, implicitamente, y como função de x em alguma vizinhança do ponto $(1, \frac{\pi}{2})$ e calcule a derivada $\frac{df}{dx}(1)$.

13. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x - y)$$

e o conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (2, 0)\}.$$

Use o teorema da função implícita para justificar que, numa vizinhança do ponto $(1, 1, 0)$, o conjunto C é o gráfico de uma função $f : I \to \mathbb{R}^2$, em que I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$.

14. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e suponhamos que a equação $F(x, y, z) = 0$ determina cada uma das variáveis como função das restantes, ou seja,

$$x = x(y, z) \; ; \; y = y(x, z) \; ; \; z = z(x, y).$$

Mostre que se tem

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -1$$