

## Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 2 (versão de 11-03-08)  
(Diferenciabilidade. Derivada da Função Composta)

1. Usando a definição, calcule as derivadas direccionais de cada uma das funções seguintes no ponto  $P$  e segundo o vector  $\mathbf{v}$  indicados:

a)  $f(x, y) = x^y$ ;  $P = (1, 1)$ ;  $\mathbf{v} = (0, 1)$

b)  $g(x, y, z) = e^x + yz$ ;  $P = (1, 1, 1)$ ;  $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$

2. Calcule as derivadas parciais de cada uma das funções seguintes:

a)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$

b)  $g(x, y) = \log \sqrt{1 + xy}$

c)  $h(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

3. Determine um campo escalar  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla\varphi = F$ , onde

$$F(x, y, z) = (2x + ye^{xy}, z + xe^{xy}, y).$$

4. Calcule a matriz Jacobiana de cada uma das funções seguintes:

a)  $f(x, y) = \left( \frac{x}{y}, xy \right)$

b)  $g(x, y, z) = (\sqrt{yz}, e^{xyz})$

5. Considere as funções:

i)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

ii)  $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Estude a diferenciabilidade destas funções na origem. Calcule  $D_{(0,1)}f(0,0)$  e  $D_{(0,1)}g(0,0)$ .

6. Usando as propriedades das funções diferenciáveis, calcule as derivadas direccionais pedidas no exercício 1.

7. Determine um vector segundo o qual a derivada direccional da função  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ , no ponto  $(1, 1)$  é nula.

8. Calcule a derivada  $D(f \circ g)(1, 1)$  em que

$$f(u, v) = (\tan(u - 1) - e^v, u^2 - v^2); \quad g(x, y) = (e^{x-y}, x - y).$$

9. Considere as funções  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$  e  $\sigma(t) = F(\gamma(t))$ . Calcule a derivada  $\sigma'(t)$ .

10. Calcule a derivada parcial  $\frac{\partial h}{\partial x}$  em que

$$h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)); \quad f(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}; \quad u(x, y) = e^{-x-y}; \quad v(x, y) = e^{xy}$$

11. Considere a função  $f(x, y, z) = e^x yz$  e seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma função de classe  $C^1$  tal que  $g(0, 0) = (0, 1, 2)$  e

$$Dg(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule a derivada direccional  $D_{\vec{v}}(f \circ g)(0, 0)$  em que  $\vec{v} = (1, 2)$ .

12. Sejam  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^1$  e tais que se verifica a equação  $F(x, g(x)) = 0$ . Supondo que  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$  calcule a derivada  $g'(x)$ .