Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 1 (versão de 26/02/2008)

(Esboço de Conjuntos. Topologia. Limites. Continuidade)

1. Esboce os conjuntos seguintes e descreva os seus cortes com rectas verticais e horizontais em $\mathbb{R}^2$ (i.e. rectas $x = const$ e $y = const$) e com planos $x = const,\ y = const$ e $z = const$ em $\mathbb{R}^3$:

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$

   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$

   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$

   d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x+y) = 1\}$

   e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 2\,;\, x > 1\,;\, y > 0\,;\, z > 0\}$

   f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1\,;\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

   g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > \sqrt{x^2 + y^2}\,;\, x + y + z \leq 1\}$

   h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\,;\, y = 1\}$

   i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = |x|\}$

2. Para cada um dos seguintes conjuntos determine o interior, o exterior e a fronteira e diga, justificando, se é aberto, fechado, limitado ou compacto.

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(xy) \leq 0\}$

   c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z < 1\}$

   d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,;\, y = x\}$

3. Calcule ou mostre que não existem os limites seguintes:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \sin(x^2 + y^2)$

   d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

   e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \ln(xy)$. (**Sugestão**: Considere a linha dada por $y = e^{-1/x^2}$).

4. Estude as funções seguintes quanto à continuidade:

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$