Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 7

(Caminhos fechados homotópicos. Teorema de Green. Teorema da Divergência. Teorema de Stokes)

(29-5-09)

1. Considere o campo vectorial
$$h(x,y,z) = \left(\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2} + yz, \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2} + xz, xy \right).$$
   a) Diga justificadamente se h é fechado no seu domínio.
   b) Calcule o trabalho de h ao longo da elipse definida por $2(x-1)^2+y^2=1,\ z=0$, percorrida no sentido anti-horário de um observador colocado no ponto $(1,0,1)$.
   c) Calcule o trabalho de h ao longo da circunferência definida por $x^2+y^2=\frac{1}{2},\ z=0$.
   d) Será h conservativo no seu domínio? Em caso negativo, indique uma região onde o seja.

2. Considere o campo vectorial
$$f(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2} + \frac{y}{(x+1)^2+y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{-(x+1)}{(x+1)^2+y^2} \right).$$
   a) Será f conservativo no seu domínio ?
   b) Calcule o trabalho realizado por f ao longo da circunferência definida pela equação $x^2+y^2=100$, percorrida no sentido anti-horário.

3. Considere o campo vectorial $g(x,y) = (-\frac{1}{3}y^3, \frac{1}{3}x^3)$ e a circunferência Γ dada pela equação $x^2+y^2=10$ e orientada no sentido horário. Calcule o trabalho realizado por g ao longo de Γ.

4. Use o Teorema de Green para calcular a área da região definida por $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$, em que $a,b>0$.

5. Prove o Toerema de Green no caso em que $F(x,y)=(0,Q(x,y))$ e $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad c\leq y\leq d,\ \ \psi_1(y)\leq x\leq\psi_2(y)\}$, para certas funções Q, ψ_1 e ψ_2 suficientemente regulares.

6. Considere a superfície
$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=\sqrt{x^2+z^2},\ 0<y<1\},$$
orientada com a normal unitária n tal que $n_y>0$. Seja $f(x,y,z)=(x,-y,0)$. Calcule pela definição o fluxo $\int_E f\cdot n$.

7. Considere a superfície
$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=3-3x^2-3z^2,\ y>0\},$$
orientada com a normal unitária n tal que $n_y>0$. Seja $f(x,y,z)=(0,y^2,-2yz)$. Calcule o fluxo $\int_S f\cdot n$ pela definição.

8. Considere a superfície
$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4,\ -1<z<1\},$$
orientada com a normal unitária n tal que $n_z>0$ nos pontos de S com coordenada $z>0$. Seja $f(x,y,z)=(\cos(yz)+2x, x^3+y, z+1)$. Calcule o fluxo de f através de S no sentido de n, $\int_S f\cdot n$.

9. Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x,y,z) = (x^3, y^3, z)$ através do cone definido por $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 < z < 1$, orientado com a normal n com terceira componente positiva.

10. Considere a superfície

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\, z > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z < 0$. Seja $h(x,y,z) = (y^2+x, x^2+y, 2z)$. Calcule o fluxo $\int_A h \cdot n$.

11. Calcule o volume da bola esférica de raio r usando o teorema da divergência.

12. Utilizando o teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $h(x,y,z) = (-y, x, 3)$ ao longo da elipse definida pelas equações $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{30} = 1\,;\, z = 0$ e orientada no sentido horário quando vista do ponto $(0,0,10)$.

13. Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo vectorial

$$F(x,y,z) = (y + \operatorname{sen} x, \cos y, z^3)$$

ao longo do caminho

$$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t)\,; \quad t \in [0, 2\pi].$$

14. Considere a superfície

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 = 1,\, z > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$. Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $g(x,y,z) = (0,0,2)$ através de M no sentido de n.

15. Considere a superfície

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{x^2+z^2},\, 0 < y < 1\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_y > 0$. Seja $f(x,y,z) = (x, -y, 0)$. Calcule o fluxo $\int_E f \cdot n$:

   a) Pelo teorema da divergência.

   b) Pelo teorema de Stokes.

   (Compare com o valor obtido no Exercício 5)

16. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3 - 3x^2 - 3z^2,\, y > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_y > 0$. Seja $f(x,y,z) = (0, y^2, -2yz)$. Calcule o fluxo $\int_S f \cdot n$:

   a) Pelo teorema da divergência.

   b) Pelo teorema de Stokes.

   (Compare com o valor obtido no Exercício 6)

17. Considere a superfície

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\, x^2 + y^2 < 1\},$$

orientada com a normal n tal que $n_z < 0$. Seja $f(x,y,z) = (-y, x, 1)$. Calcule o fluxo $\int_A f \cdot n$:

a) Pela definição.

b) Pelo teorema da divergência.

c) Pelo teorema de Stokes.

18. Prove o teorema da divergência num domínio $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in T, \ f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$ para campos vectoriais com as duas primeiras componentes nulas (T, f_1 e f_2 apropriados).