Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 5

(Teorema de Fubini. Mudança de Variáveis de Integração) (3-05-09)

1. Calcule $\int\int_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$ onde $R = [-1,1]\times[0,1]$.
2. Calcule $\int\int_R (y\cos x + 2)\,dx\,dy$, onde $R = [0,\pi/2]\times[0,1]$.
3. Calcule $\int\int\int_R (x+2y+3z)^2\,dx\,dy\,dz$, onde $R = [0,1]\times[-1/2,0]\times[0,1/3]$.
4. Calcule
$$\int_0^3 \left(\int_{-x^2+1}^{x^2+1} xy\,dy\right) dx.$$
5. Invertendo a ordem de integração, calcule
$$\int_0^1 \left(\int_{3y}^{3} e^{x^2}\,dx\right) dy$$
e
$$\int_0^1 \left(\int_0^{\operatorname{arcsen} y} y \operatorname{sen} x\,dx\right) dy.$$
6. Calcule
$$\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_{x^2+y^2}^{2} 3\,dz\right) dy\right) dx.$$
Esboce a região de integração.
7. Considere a região
$$V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+2z\le 1,\ x+y-2z\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}.$$
Escreva uma expressão para o volume de V na forma
$$\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots\,dx\right) dy\right) dz,$$
e calcule-o.
8. Considere a região
$$U = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\}.$$
Escreva expressões para o volume de U na forma:
   a) $\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots\,dx\right) dy\right) dz$.
   b) $\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots\,dz\right) dy\right) dx$.
9. Considere a região
$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x}{2}\le y\le x,\ 0\le z\le x,\ x\le 1\}.$$
Escreva expressões para o volume de A na forma:

a) $\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\cdots dz\right)dy\right)dx$.

b) $\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\cdots dx\right)dy\right)dz$.

10. Considere a região

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\, x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2\},$$

com densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = z^2$.

a) Escreva uma expressão para a coordenada z do centro de massa de V utilizando integrais da forma

$$\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\int_{\cdots}^{\cdots}\cdots dx\right)dy\right)dz.$$

b) Calcule a massa total de V.

c) Calcule a coordenada z do centro de massa de V.

11. Considere a região

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4,\, z^2 \leq x^2+y^2,\, x \geq 0, y \geq 0\},$$

com densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = (x^2+y^2)z^2$.

a) Calcule a massa de U utilizando coordenadas esféricas e coordenadas cilíndricas.

b) Calcule o momento de inércia de U relativamente ao eixo Oz.

12. Calcule o volume da região $B \subset \mathbb{R}^3$ definida pelas condições

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 4-2(x^2+y^2), & \text{se} \quad 0 \leq x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 3-(x^2+y^2), & \text{se} \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 3. \end{cases}$$

13. Utilizando coordenadas polares, calcule a área da região

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq 1\}.$$

14. Considere o conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y < 1,\, 0 < y < x\},$$

e seja $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{-(x+y)^4}(x^2-y^2)$.

Calcule $\int_D f$ utilizando uma transformação de coordenadas apropriada. Justifique cuidadosamente.

15. Considere o sólido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+z^2 \leq 4,\, 0 \leq y \leq (x^2+z^2)^{\frac{1}{4}},\, x \geq 0, z \geq 0\},$$

com densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = e^y$. Calcule a massa total de S.

16. Calcule o volume da região

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1-(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0\}.$$