

Quadros de Aula

Cálculo Diferencial e Integral II (2s-21-22)

Margarida Baía, IST

(Versão preliminar: 10/3/2022)

Conteúdo

1	Introdução	7
	Objectivo da disciplina: breve descrição	9
	Capítulo 1	24
2	Sucessões em $\mathbb{R}^n$. Limites e continuidade.	53

Lista de Figuras

1.1	Plano da primeira aula	7
1.2	Plano da primeira aula (cont.)	8

Pré-requisitos aconselháveis:

- Curso introdutório de Cálculo Diferencial e Integral numa variável (CDI-I)
- Curso introdutório de Álgebra Linear

Referências:

- *Introdução à Análise Matemática*, J. Campos Ferreira, Fundação Calouste Gulbenkian, 2011.
- *Linear Algebra and its applications*, D. Lay, S. Lay, and J. McDonald, Pearson Education, 2016 (5th edition).
- *Introduction to Linear Algebra*, G. Strang, Wellesley-Cambridge Press, 2016 (5th edition).

Notas:

O ritmo de aulas destas notas pode não corresponder ao ritmo das aulas reais, dado que estão destinadas a cursos diferentes (ver sumários). **O programa de CDI-II no IST, 2s-21-22, não abrange o estudo de superfícies, nem, conseqüentemente o Teorema de Stokes e o Teorema da divergência (ou Gauss).** A comunicação de eventuais gralhas é bem-vinda, por exemplo por email.

Aula 1

Introdução

Plano da aula:

- Objectivo de CDI-II
- Principais diferenças com CDI-I/
Exemplos de motivação
- Capítulo 1: Topologia em $\mathbb{R}^n$.
Limites e continuidade
- Noção de produto interno/norma (revisão)

Figura 1.1: Plano da primeira aula

- Noção de distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^m$ (revisão)
- Algumas noções topológicas em $\mathbb{R}^m$ (& noções associadas)
- Bola aberta
 - Bola fechada
 - Esfera
 - Ponto interior / exterior / fronteiro a um conjunto
 - Interior / exterior / fronteira de um conjunto
 - Conjunto aberto
 - Conjunto fechado
 - Conjunto limitado
 - Conjunto compacto

Figura 1.2: Plano da primeira aula (cont.)

Objectivo de CDI-II:

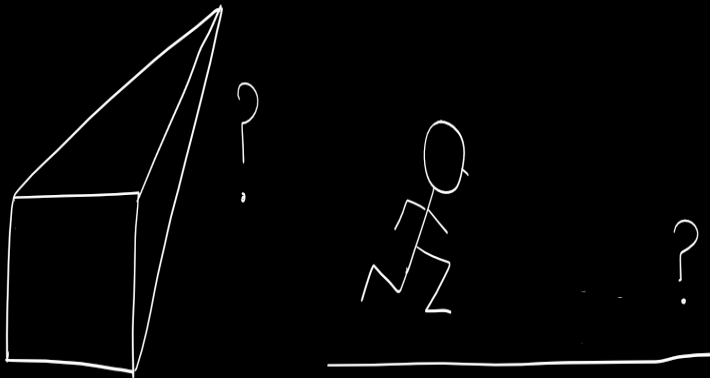
Estender as noções que aprenderam em CDI-I a dimensões superiores.

CDI

Parte da matemática que estuda:

- taxas de variação / quantidades que mudam tendo a outras (velocidade, aceleração, ...)
- acumulação de quantidades (área, volume, ...)

Aplicações:



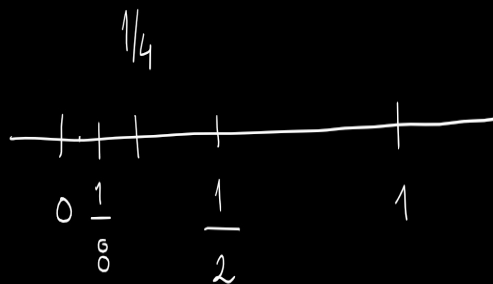
física, biologia, química, engenharias,
economia, ciência da computação, etc.

CDI - **I**

Recordar:

→ Estrutura/propriedades de $\mathbb{R}$.
Sucessões em $\mathbb{R}$. Limites de
Sucessões

ex:



$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$l = 0$$

→ Noção de função real de variável real

$$f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (f(I): \text{imagem})$$

 domínio  contradomínio

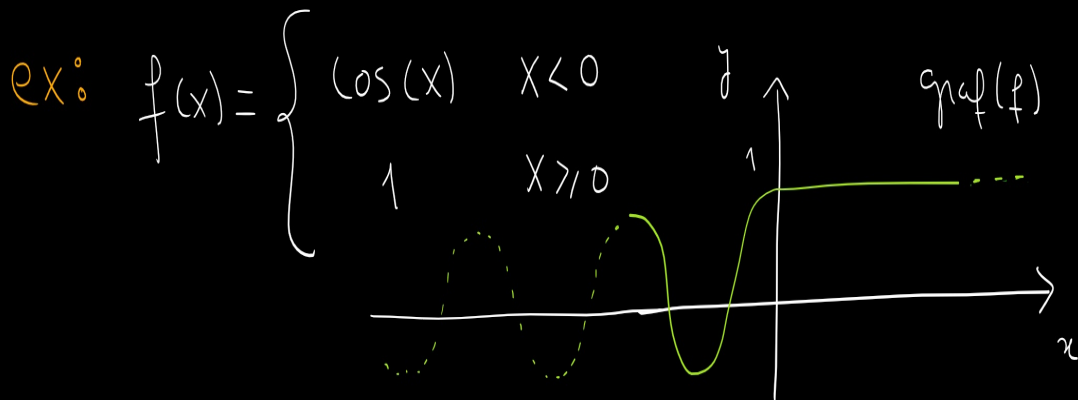
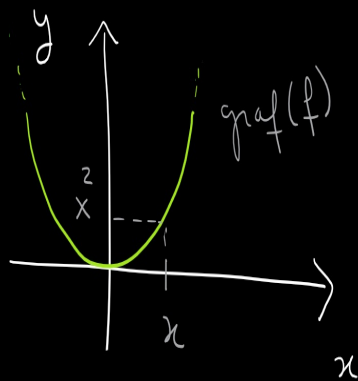
ex: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

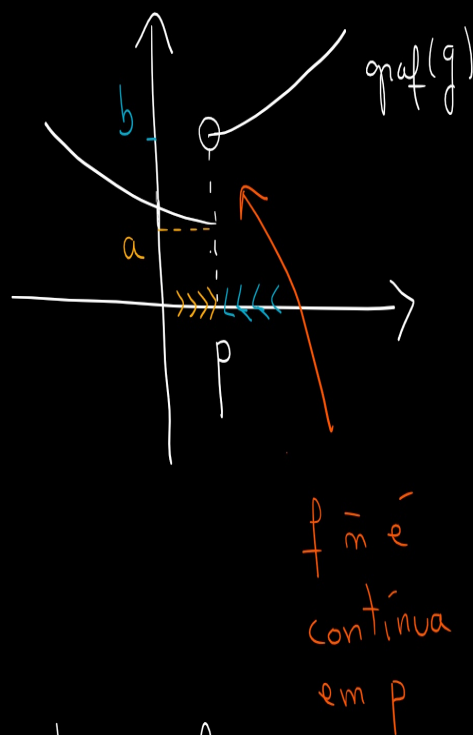
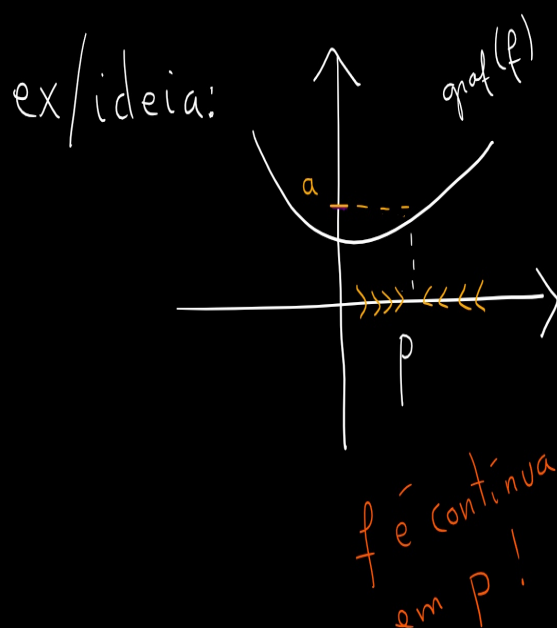
→ Noção de gráfico

ex: $f(x) = x^2$

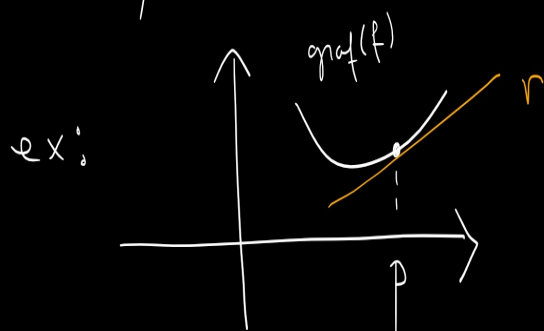
$\text{graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ (parábola)



→ Noção de limite e continuidade de funções



→ Noção de derivada e integral



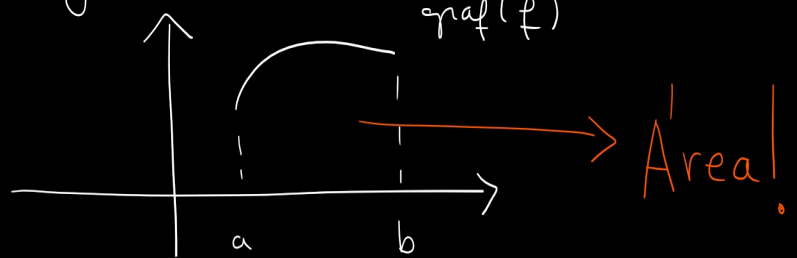
$f'(p)$? → declive de r
 + ?

$$f'(p) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (h \neq 0)}} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

Aplicação:
estudo de máximos/
mínimos/extremos
de uma função

$$\int_a^b f(x) dx ?$$

geometricamente:



Aplicação: cálculo de áreas

"Problema": para descrever o mundo
que nos rodeia precisamos
mais variáveis

Ref: Para que serve CDI-II?
Prof. J. Pimentel Nunes

[https://www.math.tecnico.pt/~jpnunes/AMIII/whyam3/
porquecii.html](https://www.math.tecnico.pt/~jpnunes/AMIII/whyam3/porquecii.html)

Referências:

- procurar

Ex:

- Temperatura duma barra ou placa num dado intervalo de tempo
 - Velocidade dum fluido num canal num dado intervalo de tempo
 - Posição duma partícula/insecto numa sala ao longo de um dado intervalo de tempo
- etc.

CDI-II?

- Estrutura/propriedades de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$
- Sucessões em $\mathbb{R}^n$ / limite
- O análogo ao que estudaram em CDI-I aplicado a funções

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^m$$

$$n \text{ ou } m : > 1 !$$

Notação:

$m > 1, m = 1 \longrightarrow$ campo escalar

ex: $f(x, y) = x^2 + y$

$m > 1, m > 1 \longrightarrow$ campo vectorial

ex: $f(x, y) = (x, x^2 + y)$

$m = 1, m > 1 \longrightarrow$ função vectorial de variável real

ex: $f(x) = (x, x^2, x-3)$

Principais dificuldades:

→ visualização deste tipo de funções

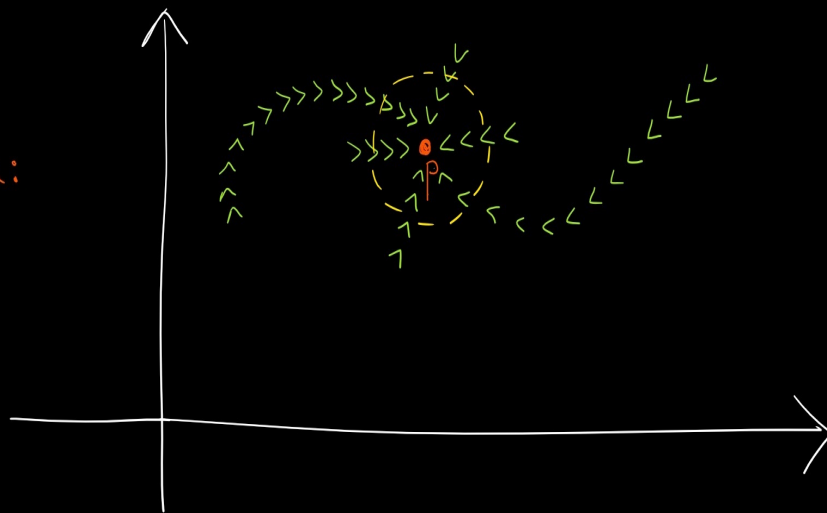
$$\text{ex: } f(x,y) = x^2 + y^2, \quad \underbrace{\text{graf}(f)}_? \subset \mathbb{R}^3$$

e se fossem:

$$f(x,y) = (x^2 + y^2, x), \quad r(t) = (t, \sin t, \cos t) \quad ?$$

→ Conceito de "variação" em $\mathbb{R}^n$

ideia:



→ Integração de funções em "objectos"
de dimensão inferior à do seu domínio
(ex: noção de integral de linha / superfície)

Gbs: no IST: cdi-iii

→ Generalizações do Teorema fundamental do cálculo (T.F.C):

T.F.C para integrais de linha

T. de Green

T. de Stokes

T. da divergência / T. de Gauss

} cdi-iii
no IST

Curiosidade sobre CDI:

Primeiros registros 1800 a.c

Contribuições importantes:

- Antiguidade: Arquimedes (287 a.C - 212 a.C)
- Século XVII: Newton, Leibniz
(outras contribuições: Kepler, Fermat)
- Séculos XVIII & XIX: Bernoulli, Euler,
Lagrange, Laplace, Cauchy, Weierstrass,
...

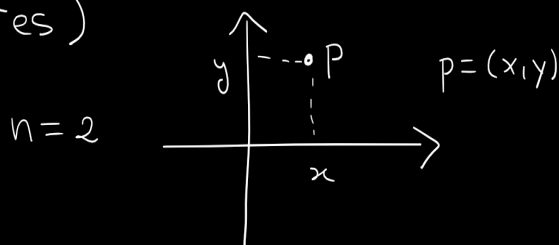
Capítulo 1

Capítulo 1: Topologia em $\mathbb{R}^n$. Limite e continuidade.

Recordar:

$\rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ ⁽ⁿ⁾ (produto cartesiano de n cópias de $\mathbb{R}$)

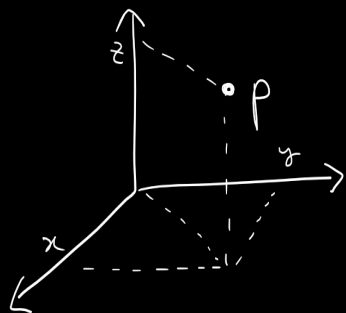
Notação: (escolhido uma origem de coordenadas θ num sistema de eixos cartesianos perpendiculares)



Referências para o Capítulo 1:

- *Introdução à Análise Matemática*, J. Campos Ferreira, Fundação Calouste Gulbenkian, 2011.
(Caso $n = 1$)
- *Introdução à Análise em $\mathbf{R}^N$* , J. Campos Ferreira, Apontamentos online, 2004.

$n=3$



$$p = (x, y, z)$$

Para n geral:

$$p \in \mathbb{R}^m \rightarrow p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

$$x \in \mathbb{R}^m \rightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

etc.

Nota: $x \equiv \vec{\theta x}$; escolhemos $\theta = 0_{\mathbb{R}^m}$

→ $\mathbb{R}^n$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com a soma e multiplicação por escalares

→ Base canônica de $\mathbb{R}^n$: $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$$e_i = (0, 0, \dots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$i = 1, \dots, n$$

Exo

$n=2$

$$e_1 = (1, 0)$$

$$e_2 = (0, 1)$$

$n=3$

$$e_1 = (1, 0, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1)$$

→ Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

→ Noção de produto interno:

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

ex: $x = (1, 2, 0)$
 $y = (0, 1, 3)$ $\Rightarrow x \cdot y = 2$

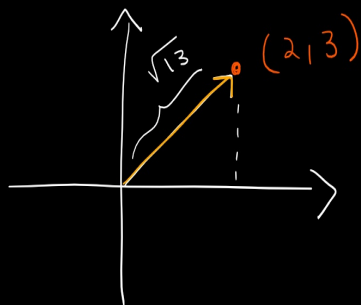
Nota: 1) rever as propriedades básicas do produto interno

2) Outra notação habitual:

$$\langle x, y \rangle$$

→ Noção de norma (ou comprimento) dum vector em $\mathbb{R}^n$

ex:



(T. Pitágoras)

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$$

Nota:

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n}^2 = x \cdot x$$

Notação: $\|x\|$ (se não houver ambiguidade)

→ Vector unitário: $x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1$

$$\text{ex: } x = (1, 0, 0, 0)$$

→ Normalização de um vector $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \neq 0$

$$y = \frac{x}{\|x\|}$$

ex: $x = (0, 1, 1, 0)$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 1, 0)$$

Nota: 1) rever as propriedades da norma de um vector

2) Em $\mathbb{R}$ o conceito correspondente é o módulo.

Principal diferença:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

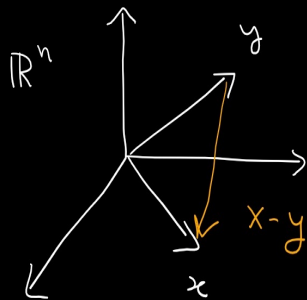
$\mathbb{R}^n$?

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

↪ desigualdade
de Cauchy-Schwarz

ex: experimentar
com $x = (0, 1)$, $y = (1, 3)$

→ Noção de distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$



$$x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\underbrace{d(x, y)}_{d_{\mathbb{R}^n}(x, y)} = \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$$

ie se $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\Rightarrow d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Obs: $d(x, 0_{\mathbb{R}^n}) = \|x\|_{\mathbb{R}^n}$

Ex: $x = (1, 0)$

$y = (2, 3)$

$d(x, y) = \sqrt{10}$

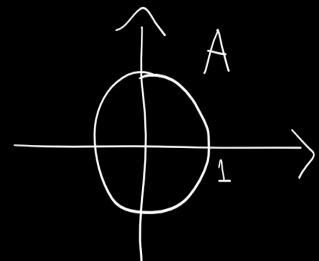
Ex: Identifique / esboce os seguintes conjuntos:

1) $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = 1 \}$ ou $d((x, y), (0, 0))$

Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow \|(x, y)\| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

A: circunferência centrada em $(0, 0)$ com raio 1



Exercícios:

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (1, 1)\| = 2 \}$$

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| = 2 \}$$

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z) - (1, 2, 0)\| = 1 \}$$

→ Algumas noções topológicas em $\mathbb{R}^n$ (& noções associadas)

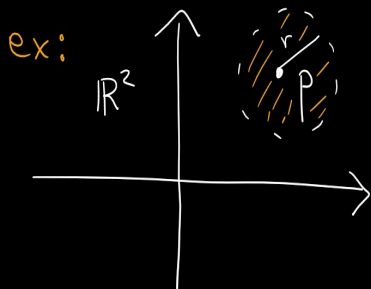
→ Noção de bola aberta em $\mathbb{R}^m$ (de centro p e raio r)

$$p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$r > 0$$

$$B(p, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \underbrace{\|x - p\|_{\mathbb{R}^m}}_{d(x, p)} < r \right\}$$

$$\underline{\text{Obs:}} \Leftrightarrow \|x - p\|_{\mathbb{R}^m}^2 < r^2 \quad (*)$$



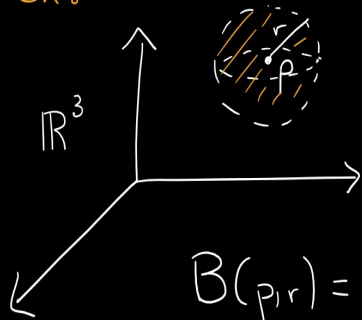
$$\text{Nota: } \|(x, y) - (p_1, p_2)\| < r$$

$$\Leftrightarrow (x - p_1)^2 + (y - p_2)^2 < r^2 \quad (*)$$

círculo de centro p e raio r !

i.e.: $B(p, r) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - p_1)^2 + (y - p_2)^2 < r^2 \}$

ex:

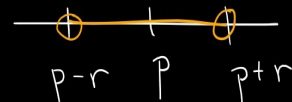


$$B(p, r) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - p_1)^2 + (y - p_2)^2 + (z - p_3)^2 < r^2 \}$$

Gbs: $n=1; \mathbb{R}, |\cdot|$

$$B(p, r) =] p - r, p + r [$$

(intervalo!)

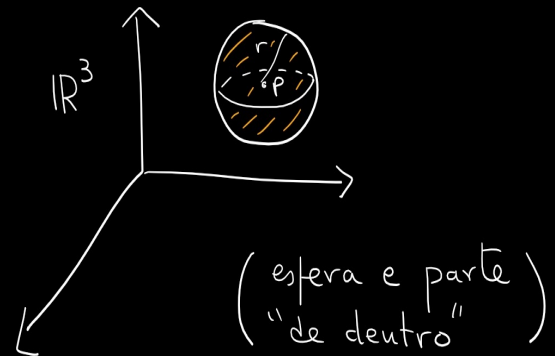
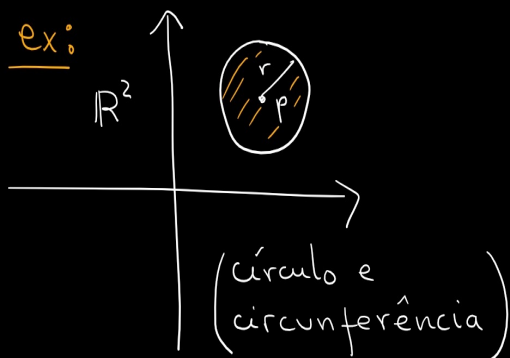


→ Bola fechada em $\mathbb{R}^m$

$$p \in \mathbb{R}^m, r > 0$$

$$\bar{B}(p, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \|x - p\|_{\mathbb{R}^n} \leq r \right\}$$

ex:



Gbs: $n=1; |\mathbb{R}, |\cdot||$

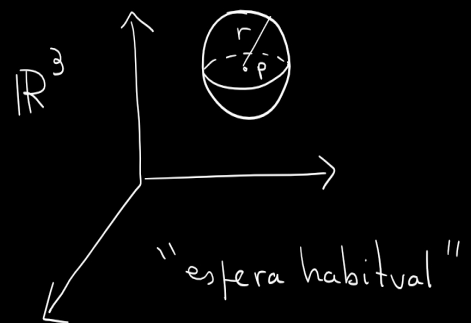
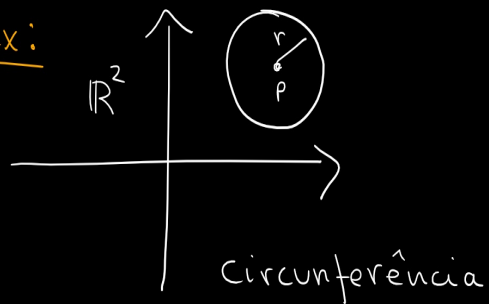


→ Esfera em $\mathbb{R}^m$

$$p \in \mathbb{R}^m, r > 0$$

$$S(p, r) = \{ x \in \mathbb{R}^m : \|x - p\|_{\mathbb{R}^m} = r \}$$

ex:

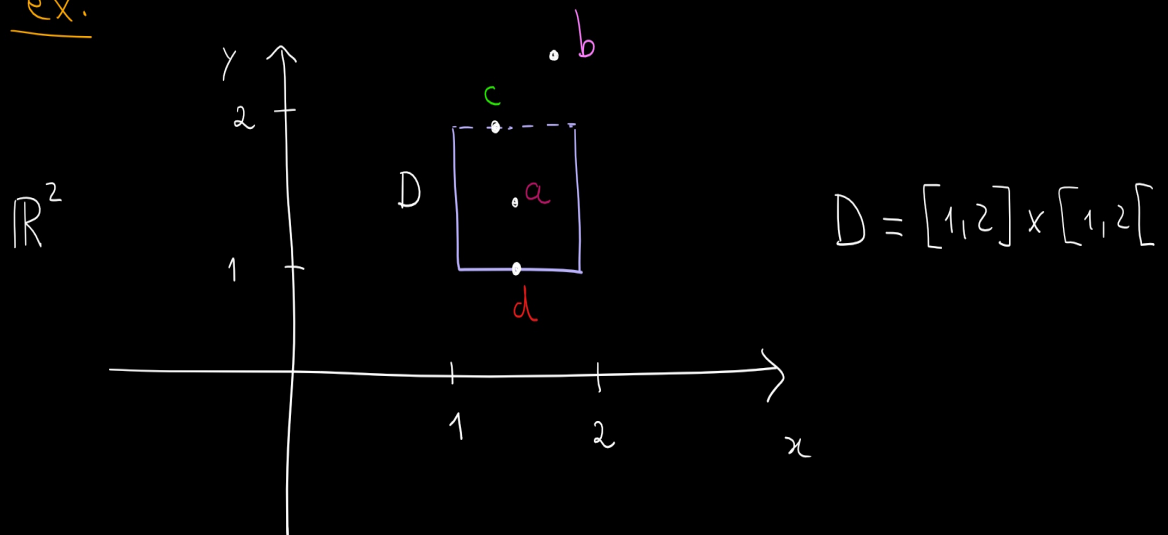


Gbs: $n=1; \mathbb{R}, 1-1$

$$S(p, r) = \{ p-r, p+r \}$$

→ Noção de ponto interior/ exterior/ fronteiro a um conjunto $D \subset \mathbb{R}^m$

ex:



Classificação dos pontos a, b, c, d ?

Notação: $p \in \mathbb{R}^n$, $B(p)$: bola aberta em $\mathbb{R}^n$ centrada em p
(quando o raio não é relevante)

• $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}(D) = \mathbb{R}^n \setminus D$ (complementar de D
em $\mathbb{R}^n$)

Dados $D \subset \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$:

Def $\left\{ \begin{array}{l} p \text{ diz-se } \underline{\text{interior}} \text{ a } D \text{ se } \underbrace{\text{existe } B(p)}_{\exists} \underbrace{\text{tal que}}_{/} \\ B(p) \subset D \end{array} \right.$

Def $\left\{ \begin{array}{l} p \text{ diz-se } \underline{\text{exterior}} \text{ a } D \text{ se } \exists B(p) / B(p) \subset \mathcal{C}(D) \end{array} \right.$

Def $\left\{ \begin{array}{l} p \text{ diz-se } \underline{\text{fronteiro}} \text{ a } D \text{ se toda bola centrada} \\ \text{em } p \text{ contém pontos de } D \text{ e de } \mathcal{C}(D). \end{array} \right.$

(ie: $\forall B(p) \Rightarrow B(p) \cap D \neq \emptyset, B(p) \cap \partial(D) \neq \emptyset$)
 $\cup$
 para toda

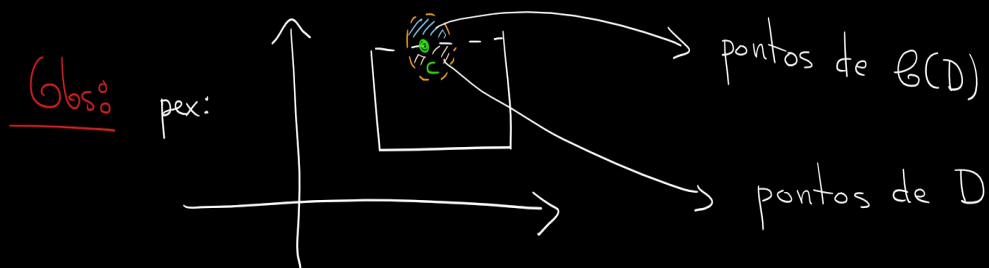
No exemplo anterior:

$a \rightarrow$ ponto interior a D

$b \rightarrow$ ponto exterior a D

$c \rightarrow$ ponto fronteiro a D

$d \rightarrow$ ponto fronteiro a D



→ Noção de interior / exterior / fronteira dum conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$

Interior de D

$$\overset{\circ}{D} = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \text{ é um ponto interior a } D \}$$

ou $\text{int}(D)$

Exterior de D

$$\text{ext}(D) = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \text{ é um ponto exterior a } D \}$$

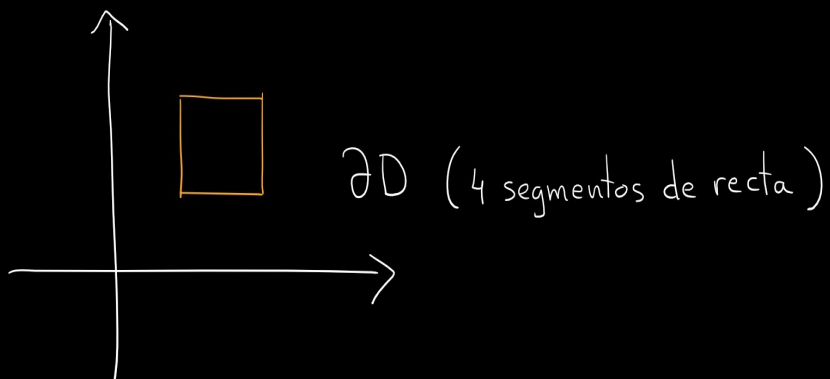
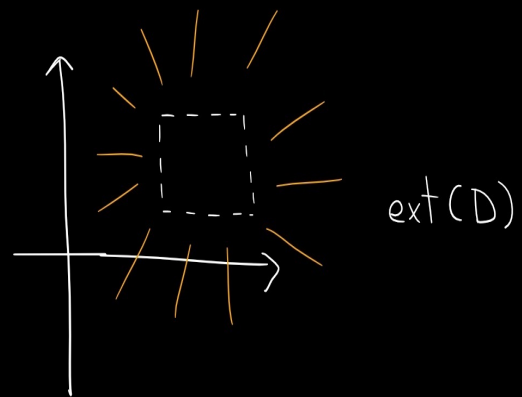
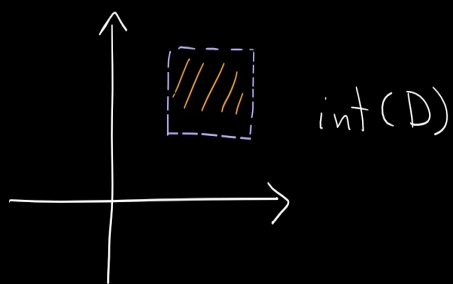
Fronteira de D

$$\partial D = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \text{ é um ponto fronteiro de } D \}$$

ou $\text{front}(D)$

Obs: $\partial D = \partial(\ell(D))$

No exemplo anterior:



→ Noção de conjunto aberto/fechado

Dado $D \subset \mathbb{R}^m$

def: $\left\{ \begin{array}{l} D \text{ diz-se um } \underline{\text{conjunto aberto}} \\ \text{se } D = \overset{\circ}{D} \end{array} \right.$

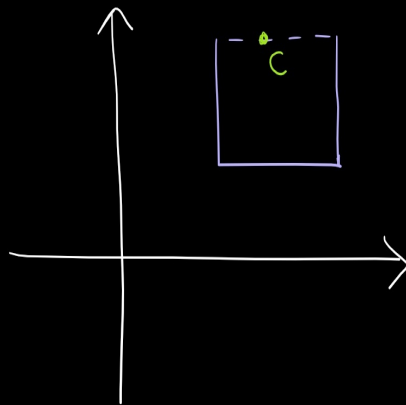
def: $\left\{ \begin{array}{l} D \text{ diz-se um } \underline{\text{conjunto fechado}} \\ \text{se } \mathcal{B}(D) \text{ é um conjunto aberto} \end{array} \right.$

no exemplo anterior:

D não é um conjunto aberto ($D \neq \overset{\circ}{D}$)

D não é um conjunto fechado.

porquê?



$c \in \mathcal{C}(D)$
mas $c \notin \text{int}(\mathcal{C}(D))$

Obs: $\mathbb{R}^n$, $\emptyset = \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (únicos conjuntos em $\mathbb{R}^n$ tanto abertos como fechados)

Propriedades:

Prop: $D \subset \mathbb{R}^m$ é fechado se e somente se
 $\partial D \subset D$ sse

Prova: na aula

→ Noção de fecho de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^m$

$$\overline{D} = D \cup \partial D \quad (\text{ou aderência})$$

Corolário: $D \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto fechado
se $D = \overline{D}$

Outras propriedades: veremos em breve

Ex: $A = \{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0 \}$ $\longrightarrow$ é um conjunto aberto
 $\downarrow$ ou $<$
 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua

Ex: caracterização de um conjunto fechado
usando sucessões em $\mathbb{R}^n$

Teorema $\longrightarrow$ Exercício: fazer a prova

- $\longrightarrow$ A intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto
- $\longrightarrow$ A união de um número arbitrário de conjuntos abertos é um conjunto aberto
- $\longrightarrow$ A união de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado
- $\longrightarrow$ A intersecção de um número arbitrário de conjuntos fechados é um conjunto fechado

Referências para a prova:

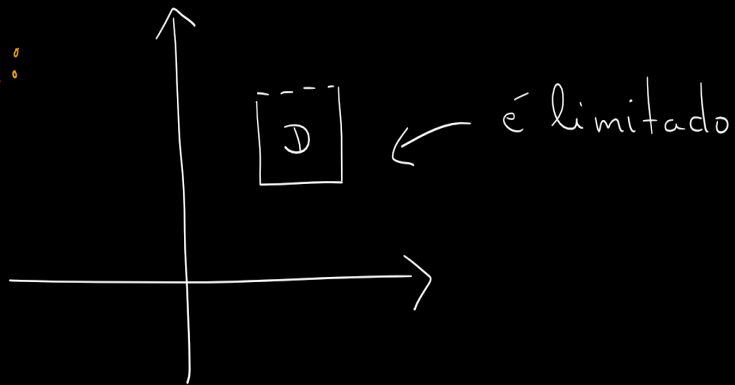
- (Prova em $n = 1$) *Introdução à Análise Matemática*, J. Campos Ferreira, Fundação Calouste Gulbenkian, 2011.
- *Introdução à Análise em $\mathbf{R}^N$* , J. Campos Ferreira, Apontamentos online, 2004.

→ Noção de conjunto limitado

$D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se limitado se existe $K > 0$ tal que a norma de qualquer elemento de D é limitada por K ie:

$$\|x\| \leq K, \quad \forall x \in D.$$

Ex:



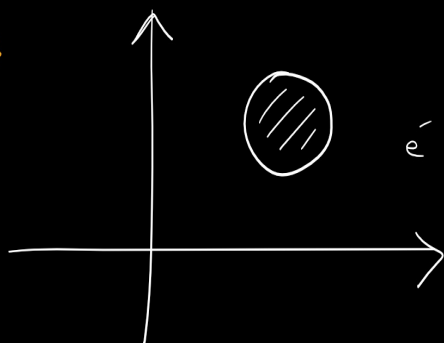
$\mathbb{R}^2$: não é limitado

Gbs: D é limitado se existe $K > 0$ tal que $D \subset B(0, K)$.

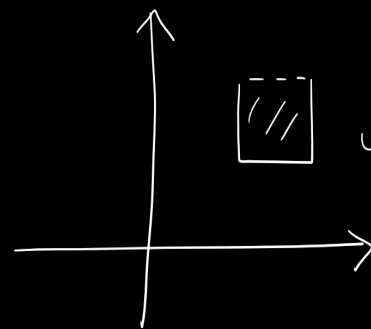
→ Noção de conjunto compacto

$D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto se é um conjunto simultaneamente limitado e fechado.

ex:



é compacto



não é compacto

Exemplos vários:

1. $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \}$

$\text{int}(A)$? $\text{ext}(A)$? ∂A ? compacto?

2. $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2, 4x^2 + y^2 \leq 1 \}$

é aberto? é limitado?

3. $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \}$ é compacto?

4. $D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2, -1 < z < 1 \}$

é compacto?

Resolução parcial:

1. A ? É simples ver que:

$$\text{int}(A) = \emptyset$$

$$\text{ext}(A) = \mathbb{R}^n \setminus A$$

$$\partial A = A$$

A é compacto? não porque A não é limitado.

Com efeito, para cada $k > 0$ podemos sempre encontrar um elemento de A com norma superior a k . Por exemplo:

$$\underbrace{\| (k+1, 0, 0) \|}_{\in A} = \sqrt{(k+1)^2} = k+1 > k$$

2, 3, 4: exercício!

Aula 2

Sucessões em $\mathbb{R}^n$. Limites e continuidade.

Plano da aula:

- Noção de sucessão em $\mathbb{R}^n$.
- Convergência
- Algumas propriedades
- Caracterização dum conjunto fechado por sucessões
- Noção de limite e continuidade de funções

Sucessões em $\mathbb{R}^n$

Notação: $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

Recordar: cdi-i

exemplo de sucessão? $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}^+} \subset \mathbb{R}$, $u_m = \frac{1}{m}$

É uma aplicação: $\mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
 $m \longrightarrow u_m$, $u_m = \frac{1}{m}$

$\mathbb{R}^n$?

Uma sucessão em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação

$$\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$m \rightarrow u_m \quad \leftarrow \text{termo geral}$$

Notação: $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}^+}$ ou $\{u_m\}$

Ex: $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}^+} \subset \mathbb{R}^3$, $u_m = \left(\frac{1}{m}, m+1, 0 \right)$

Sucessão coordenada de ordem j , $j=1, \dots, n$

de uma sucessão $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}^+}$, $u_m = (u_{m1}, \dots, u_{mn})$:

a sucessão $\{u_{mj}\}_{m \in \mathbb{N}^+}$

No exemplo anterior:

$$u_m = \left(\frac{1}{m}, m+1, 0 \right)$$

s.c.d.o

Sucessão coordenada de ordem um:

$$\left\{ \frac{1}{m} \right\}_{m \in \mathbb{N}^+} \quad \underbrace{\text{isto é:}}_{\text{i.e.}} \quad u_{m1} = \frac{1}{m}$$

$$\text{s.c.d.o dois: } \left\{ m+1 \right\}_{m \in \mathbb{N}^+} \quad \text{i.e. } u_{m2} = m+1$$

s.c.d.o três: sucessão constantemente nula i.e

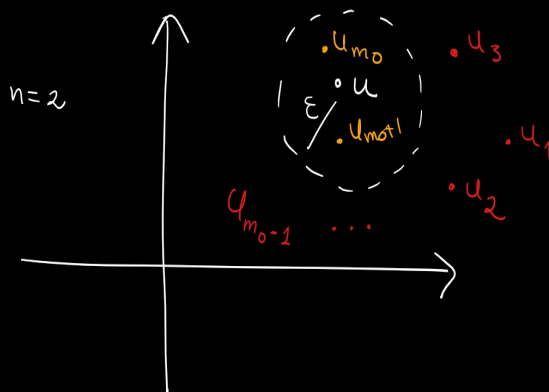
$$u_{m3} = 0$$

Def: Dizemos que uma sucessão $\{u_m\} \subset \mathbb{R}^n$ converge para $u \in \mathbb{R}^n$ (e escreveremos $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = u$) se para cada $\varepsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que

$$\|u_m - u\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon, \quad \forall m > m_0$$

Gbs: É uma definição análoga à de sucessões em $\mathbb{R}$
 $(\|\cdot\| \leadsto |\cdot|)$

Graficamente:



Notação: $u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_m)$

Prop. $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = u$ se e somente se $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{mj} = u_j$

para cada $j = 1, \dots, n$.

Prova? Baseia-se nas duas desigualdades seguintes:

Lema Dado $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se que para cada $j = 1, \dots, n$,

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$$

No exemplo anterior:

$$u_m = \left(\frac{1}{m}, m+1, 0 \right)$$

A sucessão $\{u_m\}$ não converge em $\mathbb{R}^3$ dado que

$$\nexists \lim_{m \rightarrow \infty} u_m$$

$$\text{Ex: } u_m = \left(\frac{m-1}{m}, \frac{1}{m^4} \right) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}^2} (1, 0) \equiv u$$

Propriedades das sucessões em $\mathbb{R}^m$? análogas às das sucessões em $\mathbb{R}$.

ex: Suponhamos $\{x_m\} \subset \mathbb{R}$, $\{y_m\} \subset \mathbb{R}$ tal que
$$x_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} 2, \quad y_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} 3.$$

$\lim_{m \rightarrow \infty} (x_m + y_m, \sqrt{x_m^2 + y_m^2})$? sol: $(5, \sqrt{13})$

def: Dizemos que uma sucessão $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}^+} \subset \mathbb{R}^n$ é limitada se existe $K > 0$ tal que:

$$\|u_m\|_{\mathbb{R}^n} < K, \quad \forall m \in \mathbb{N}^+$$

(ie: como conjunto é limitado em $\mathbb{R}^n$)

Ex:

$\rightarrow \{u_m\}_{m \in \mathbb{N}^+}$, $u_m = \left((-1)^m, 1 \right)$, é limitada

$$pq? \quad \forall m \in \mathbb{N}^+, \|u_m\| = \sqrt{2} \quad (K = \sqrt{2})$$

$\rightarrow \{u_m\}_{m \in \mathbb{N}^+}$, $u_m = \left(\frac{2}{m}, \frac{2}{m} \right)$, é limitada

$$pq? \quad \forall m \in \mathbb{N}^+, \|u_m\| = \sqrt{\frac{8}{m^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{m} \leq 2\sqrt{2} = K$$

Teorema (Bolzano-Weierstrass)

Toda sucessão limitada em $\mathbb{R}^n$ tem subsucessões convergentes.

Caracterização de um conjunto fechado por sucessões

Resultados auxiliares:

Teorema 1 $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado se e somente se $\bar{D} = D$.

Teorema 2 Dado $D \subset \mathbb{R}^n$, $p \in \bar{D}$ se e somente se existe uma sucessão $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}^+} \subset D$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = p$.

Teorema

$D \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se e somente se para cada sucessão $\{u_m\} \subset D$ convergente sucede que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m \in D.$$

Prova:

$\Rightarrow$ Suponhamos que D é um conjunto fechado e $\{u_m\}$ é uma sucessão de termos em D tal que

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} u_m = p, \quad p \in \mathbb{R}^n.$$

Devemos ver que $p \in D$.

$p \in D$?

Pelo teorema 2 como $p = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m$, $\exists u_m \in D$

$\Rightarrow p \in \bar{D}$

Mas como D é fechado, pelo teorema 1: $D = \bar{D}$.

Logo $p \in D$.

$\Leftarrow$ Exercício!

Exemplo: Prove que o conjunto

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1 \}$$

é um conjunto fechado.

Resolução: Usamos a caracterização anterior.

Seja $\{u_m\} \subset D$, $u_m = (x_m, y_m)$. Suponhamos que existe $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = (a, b).$$

$$\text{Dado que } u_m \in D \Rightarrow x_m^2 + 2y_m^2 \leq 1$$

Por outro lado como $u_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}^2} (a,b)$ então

$$x_m^2 + 2y_m^2 \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} a^2 + 2b^2$$

Logo $a^2 + 2b^2 \leq 1$ ie $(a,b) \in D$.

A sucessão considerada é arbitrária. Pela caracterização por sucessões de conjuntos fechados segue-se que D é um conjunto fechado.

Limite e continuidade de funções

$$\underline{f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m}$$

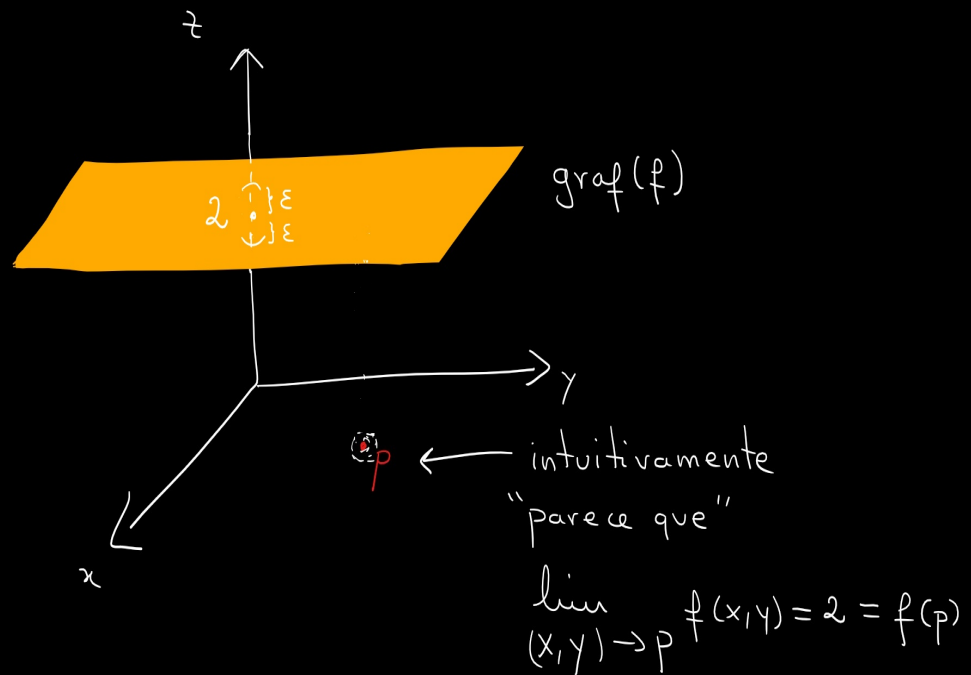
$$\underline{1^\circ \text{ Caso: } f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1}$$

ideia/visualização

ex:

$$f(x, y) = 2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} \text{graf}(f) &= \{ (x, y, 2), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 2 \} \end{aligned}$$



Recordar cdi-i: $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p \in \overline{I}$

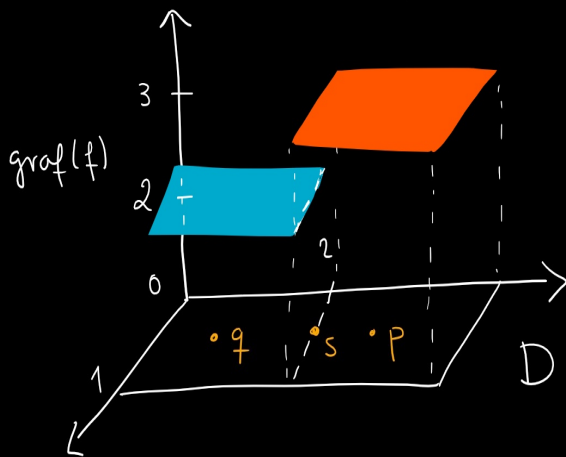
$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / x \in I, |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
 por def.

ex:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & (x,y) \in [0,1] \times [0,2[\\ 3 & (x,y) \in [0,1] \times [2,4] \end{cases}$$

Neste caso $\text{Dom} f = [0,1] \times [0,4]$

$$\begin{aligned} \text{graf}(f) &= \{ (x,y,z) : z=2, (x,y) \in [0,1] \times [0,2[\} \cup \\ &= \{ (x,y,z) : z=3, (x,y) \in [0,1] \times [2,4] \} \end{aligned}$$



Intuitivamente "parece que":

$$\lim_{(x,y) \rightarrow q} f(x,y) = 2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow p} f(x,y) = 3, \quad \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow s} f(x,y)$$

def: Dada $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \bar{D}$, $l \in \mathbb{R}$, dizemos que o limite de f no ponto p é l se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / x \in D, \|x - p\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Notação: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = l$

Teorema (Caracterização de limites por sucessões)

Dada $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \bar{D}$, $l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = l$

se e somente se para cada sucessão $\{u_m\} \subset D$,

$u_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}^n} p$, segue-se que $f(u_m) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} l$.

ex: Estude o limite

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \underbrace{(1,1)}_P}} \underbrace{\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{f(x,y)}$$

Usamos a caracterização anterior: seja $u_m = (x_m, y_m)$,

$$\underbrace{u_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}^2} P}_{(*)} \Rightarrow f(u_m) = \frac{x_m + y_m}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} \frac{2}{\sqrt{2}}$$

(pelas propriedades das sucessões de cdi-i dado que $(*)$ é equivalente a $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = 1, \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = 1$)

Pela arbitrariedade da sucessão anterior, concluímos

que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x,y) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Nota: $f(1,1)$

def: Dizemos que $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua num ponto $p \in D$ se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$

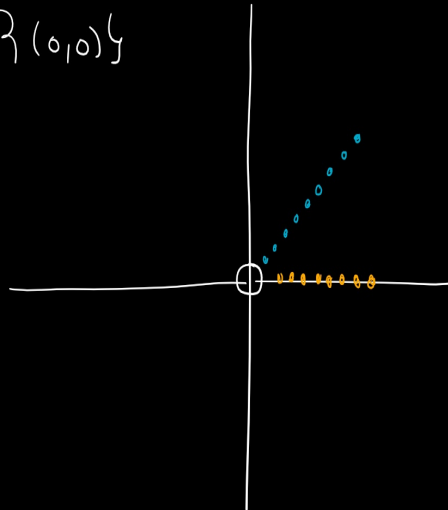
ex: $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é contínua em $(1,1)$.

Nota: Por um argumento análogo pode-se ver que esta função é contínua em cada ponto do seu domínio, isto é em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pergunta: $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$?

Veremos que não usando uma vez mais a caracterização de limites por sucessões.

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$



Consideramos duas
sucessões em $\mathbb{R}^n$
tendendo para zero:

$$\underline{u}_m = \left(\frac{1}{m}, 0 \right)$$

$$\underline{v}_m = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m} \right)$$

Tem-se que:

$$f(u_m) = \frac{1/m}{\sqrt{1/m^2}} = \frac{1}{m} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} 0 \quad \left(\text{de onde, caso exista o limite de } f \text{ em } (0,0) \text{ será zero pelo teorema} \right).$$

Mas como

$$f(V_m) = \frac{\frac{2}{m}}{\sqrt{\frac{2}{m^2}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} \frac{2}{\sqrt{2}} \neq 1$$

Concluimos que ~~$\exists$~~ $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x, y)$

(existem duas sucessões a tender para zero
cuja imagens convergem para limites distintos).

Nota: As propriedades básicas das noções de limite e continuidade de campos escalares são análogas às das funções de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$.

exemplo: (Ver outras propriedades nas notas do Prof. Y.C. Ferreira)

Prop: Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Se $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções contínuas num ponto $p \in D$ então $f+g: D \rightarrow \mathbb{R}$ é também contínua em p .

Idem: $-, \cdot, \div, 0$  desde que $g(p) \neq 0$

Exemplos elementares de funções $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas

- 1) Funções cujo valor depende apenas de uma variável e tais que a correspondente função de cdi-i seja contínua

exemplo

$f(x, y, z) = x^4$ é contínua em $\mathbb{R}^3$

$g(x, y) = \cos(y) + e^y$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ etc.

Obs: cdi-i

$$f(x) = x^4$$

$$g(x) = \cos(x)$$

$$h(x) = e^x \text{ etc.}$$

são contínuas em $\mathbb{R}$

Nota: a modo de exemplo vejamos uma forma simples de provar que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^4$ é contínua num ponto arbitrário $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Usamos a caracterização por sucessões de limites.

$$\text{Seja } u_m = (x_m, y_m, z_m) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}^3} (a, b, c)$$

$$\Rightarrow f(u_m) = f(x_m, y_m, z_m) = x_m^4 \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} a^4 = f(a, b, c)$$

Pela arbitrariedade da sucessão:

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c) \text{ i.e. } f \text{ é contínua em } (a, b, c).$$

2) Funções obtidas a partir das funções de 1) por meio de operações elementares

exemplos:

$$\left. \begin{array}{l} f(x,y,z) = x^4 + e^x \\ g(x,y,z) = \sin(y) \end{array} \right\} \text{ são contínuas em } \mathbb{R}^3$$



$$h(x,y,z) = x^4 + e^x + \sin(y)$$

é contínua em $\mathbb{R}^3$

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y, z) = x^4 + y + z^3 \\ g(x) = \sin(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{contínuas em } \mathbb{R}^3 \text{ e } \mathbb{R} \\ \text{(respectivamente)} \end{array}$$



$$h(x, y, z) = \sin(x^4 + y + z^3)$$

é contínua em $\mathbb{R}^3$

Outros exemplos:

$$f(x, y, z) = \frac{x + yz}{x} \text{ é contínua no seu domínio}$$

$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \}$ (por ser quociente de funções contínuas cujo denominador não se anula em D).

def: Dizemos que uma função contínua $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é prolongável por continuidade a um ponto $p \in \bar{D}$, $p \notin D$ (ie $p \in \partial D$) se existe $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$.

Neste caso, designando $l = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$, chamamos à função

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ l & x = p \end{cases}$$

o prolongamento de f por continuidade ao ponto p .

ex: Pelo que vimos, a função

$$f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

não é prolongável por continuidade à origem.

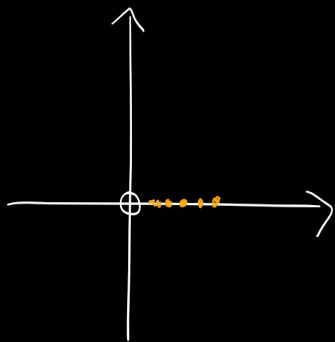
(Recordar que $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$)

ex: Estude se a função $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

é prolongável por continuidade à origem.

Resolução: estudemos $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$. $\textcircled{*}$

1º passo: (escolhemos uma sucessão particular; dará uma ideia do possível limite)



$$\underline{u_m} = \left(\frac{1}{m}, 0 \right) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}^2} (0,0)$$

$$f(u_m) = 0 \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} 0$$

Logo: caso exista o limite $\textcircled{*}$ é zero.

2º passo: Vejamos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

Usamos mais uma vez a caracterização de limite por sucessões.

Seja $u_m = (x_m, y_m)$ uma sucessão convergente para $(0,0)$. Temos que:

$$0 \leq |f(u_m)| = \frac{|x_m| y_m^2}{x_m^2 + y_m^2} \leq |x_m|, \quad \forall m \in \mathbb{N}^+$$

nota:

$$\frac{a}{a+k} \leq 1$$

$$k \geq 0$$

Como $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = 0$, concluímos por enquadramento

$$\text{que } \lim_{m \rightarrow \infty} |f(u_m)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} f(u_m) = 0.$$

Assim (pela caracterização por sucessões)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Tendo em conta que f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (verificar!), podemos então dizer que f é prolongável por continuidade à origem.

Prolongamento de f por continuidade à origem ?

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Noção de limite direccional