APOIO À FICHA 6

MARGARIDA BAÍA, DM, IST

Problema da determinação de extremos duma função sujeita a uma ou mais restrições (extremos condicionados).

A) Exemplos de motivação/aplicação.

Problema 1. Uma empresa pretende construir um modelo de caixa de cartão (sem tampa e com base rectangular) de modo a que o volume do seu interior seja máximo, usando apenas 12 metros quadrados de cartão na sua construção. Objectivo deste problema: determinar as dimensões desta caixa.

Possível formulação do problema 1. Chamando x, y, z às dimensões da caixa deste problema (largura, profundidade, altura), pretendemos maximizar

$$V(x, y, z) = xyz \quad \text{(volume)}$$

sujeito à restrição

$$A(x, y, z) = 12$$

onde $A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ (área lateral da caixa).

Problema 2. Uma empresa estima que o lucro diário (em euros) da produção de

- x miligramas de um solvente S_1,
- y miligramas de um solvente S_2,
- z miligramas de um solvente S_3,

seja dado pela função

$$L(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2,$$

e o seu respectivo custo por

$$C(x, y, z) = 2x + 3y + z.$$

Pergunta: que quantidade de solvente S_i $(i = 1, 2, 3)$ deve esta empresa produzir diariamente para ter um lucro máximo com um gasto de 100 euros?

Possível formulação do problema 2. Devemos determinar o ponto (x, y, z) de máximo da função L sujeito à restrição

$$C(x, y, z) = 100.$$

Problema 3. Um aluno estagiário numa empresa agropecuária pretende construir um reservatório cilindrico fechado com diâmetro d e altura h para armazenamento de uma tonelada de trigo, a partir do corte de uma chapa de uma dada espessura. Pergunta: diâmetro e altura deste reservatório de modo a que este aluno use a menor quantidade de chapa possível?

Possível formulação do problema 3. Sabemos que a área lateral de um cilindro de diâmetro d e altura h é dada [1]

$$A(d,h) = 2\pi\Big(\frac{d}{2}\Big)^2 + \pi dh$$

e que o volume é:

$$V(d,h) = \pi\Big(\frac{d}{2}\Big)^2 h$$

Devemos determinar (h,d) o ponto de mínimo da função A sujeito à restrição

$$V(d,h) = 1000.$$

Problema 4. Qual o ponto da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ mais próximo de $(3,1,-1)$?

Possível formulação do problema 4. Devemos descobrir o ponto (x,y,z) de mínimo da função

$$f(x,y,z) = \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$$

restricto à condição

$$x^2+y^2+z^2=4$$

Atendendo a que $h(t)=\sqrt{t}$, $t\geq 0$ é uma função crescente, bastará determinar o ponto (x,y,z) de mínimo da função

$$g(x,y,z) = (x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$$

(porquê? pensar...) restricto à condição

$$x^2+y^2+z^2=4$$

Problema 5. Determine três números positivos cuja soma seja 120 e o seu produto o máximo possível. *Possível formulação do problema 5?*

Problema 6. Determine a distância mínima da origem à linha

$$L = \{(x,y,x)\in\mathbb{R}^3 :\ x+y+z=8,\ 2x-y+3z=28\}$$

Possível formulação do problema 6?

Todos estes problemas podem-se resolver como aplicação do Teorema dos multiplicadores de Lagrange visto nas aulas teóricas. Deixo-os como desafio.

Recordo ainda a versão do Teorema dos multiplicadores de Lagrange visto nas aulas teóricas.

Teorema Seja $f: D\to\mathbb{R}$ uma função de classe um num aberto $D\subset\mathbb{R}^n$. Seja

$$M = \{x\in D :\ F(x)=0\}$$

onde assumimos que $F: D\to\mathbb{R}^m$ $(m<n)$ é uma função de classe um em D tal que a característica da derivada de F é máxima nos pontos de M. Então se a restrição de f a M tem um extremos num ponto $p\in M$, existem escalares $\lambda_1,...,\lambda_m\in\mathbb{R}$ (chamados multiplicadores de Lagrange) tais que

$$\nabla f(p) = \lambda_1\nabla F_1(p) + ... + \lambda_m\nabla F_m(p).$$

[1] Pode confirmar esta fórmula do secundário uma vez que estude a matéria do Capítulo 7; fica como desafio. Atenção: ao contrário que neste exemplo, regra geral nas aulas o termo cilindro refere-se à superfície cilindrica.

Nota 1: podem-se encontrar outras aplicações em problemas específicos de programação linear, modelos matemáticos de várias áreas que envolvam minimizar ou maximizar uma dada energia sujeita a uma ou várias restrições, etc... (estes problemas já saem dentro do âmbito de CDI-II).

Nota 2: Em alguns casos, podemos obter os pontos de extremo de uma função restricta a uma ou várias condições de forma fácil (por exemplo: o problema resultante traduz-se em determinar os extremos de uma função de uma varíavel)

Exemplo: Determinar os pontos de extremos da função $f(x,y) = xy$ restricta à recta

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = 1 - x\}$$

Possível resolução: Procuramos os pontos $(x, 1-x)$ onde $f(x, 1-x) = x(1-x)$ alcance um valor extremo. Este problema reduz-se a estudar os pontos de extremos da função de CDI-I

$$x \to x(1-x), \ x \in \mathbb{R},$$

que claramente (porquê? pensar...) alcança um valor máximo (absoluto, de facto) no ponto $x = 1/2$ (e não alcança valor mínimo em $\mathbb{R}$). Assim $f\lfloor_R$ alcança um máximo (absoluto) no ponto $(1/2, 1/2)$. O seu valor máximo nesta recta é: $f(1/2, 1/2) = 1/4$.

B) Alguns exemplos resolvidos semelhantes aos problemas da ficha 6.

1. Determine os extremos de $f(x,y) = y$ na elipse

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2xy + 2y^2 = 4\}$$

Resolução: Notemos que os pontos de E são tais que $F(x,y) = x^2+2xy+2y^2-4 = 0$. Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange (ver que as condições são verficadas) se um ponto (x,y) é um ponto de extremo de $f\lfloor E$ então: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x,y) = 0, \ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla F(x,y)$$

i.e

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 = 4 \\ 0 = \lambda(2x + 2y) \\ 1 = \lambda(2x + 4y) \end{cases}$$

É fácil ver que este sistema tem duas soluções: $(2,-2)$ e $(-2,2)$. Por outro lado, pelo Teorema de Weierstrass, dado que f é contínua e E é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ (é? pensar...) sabemos que existem máximos/mínimos absolutos de f em E. Concluimos então que estes dois pontos são pontos de extremos de $f\lfloor E$, sendo o primeiro um ponto de mínimo ($f(2,2) = -2$) e o outro um ponto de máximo ($f(2,2) = 2$).

2. Determine o ponto de

$$L = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ x + z = 1\}$$

que apresenta maior terceira coordenada.

Resolução: Neste caso os pontos de L são tais que $F(x,y,z) = (x^2+y^2-z, x+z-1) = (0,0)$. Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange (ver que as condições são

verficadas) se um ponto (x, y, z) é um ponto de extremo de $f\lfloor L$, onde $f(x, y, z) = z$, então: $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x, y, z) = (0, 0, 0),\ \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla F_1(x, y, z) + \mu \nabla F_2(x, y, z)$$

onde $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ e $F_2(x, y, z) = x + z - 1$, i.e,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + z = 1 \\ 0 = \lambda 2x + \mu \\ 0 = \lambda 2y \\ 1 = -\lambda + \mu \end{cases}$$

É fácil ver que este sistema tem duas soluções:

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0, \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = p_1$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0, \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = p_2$$

Por outro lado, pelo Teorema de Weierstrass, dado que f é contínua e L é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$ (é? pensar...) sabemos que existem máximos/mínimos absolutos de f em L. Concluimos então que estes dois pontos são pontos de extremos de $f\lfloor L$. Como $f(p_2) > f(p_1)$ o ponto p_2 é um ponto de máximo de $f\lfloor L$.

Bom estudo!