Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 13 de Abril de 2019 - 11:00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Preencha o nome, número de aluno e curso abaixo.
2. Numere as *páginas* do seu caderno de respostas e, à medida que resolver a prova, indique as páginas de resolução de cada pergunta na coluna *Páginas* da tabela. **Caso não o faça as suas respostas poderão não ser consideradas.**
3. Não é permitido o uso de máquinas de calcular durante o teste.

Nome: ______________________________

Número: ______________________________

Curso: ______________________________

Pergunta	Cotação	Páginas	Classificação
1. (a)	2,0		
1. (b)	2,0		
1. (c)	1,0		
1. (d)	2,0		
2.	2,0		
3.	2,0		
4. (a)	2,0		
4. (b)	2,0		
5.	2,0		
6.	3,0		

Boa Sorte!

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 13 de Abril de 2019 - 11:00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[2,0] a) Indique os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais a função f é contínua.

Resposta: A função definida pela expressão $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ é um quociente de polinómios e por isso é contínua em todos os pontos do seu domínio. Portanto a função composta $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right)$ também é contínua nesses pontos, uma vez que sen é contínua. Por fim, as desigualdades seguintes mostram que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = 0$$

e que portanto f também é contínua em $(0,0)$:

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) - 0\right| \leq \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y| \leq ||(x,y)|| \ .$$

[2,0] b) Calcule $D_{\boldsymbol{v}}f(0,0)$ para um vector arbitrário $\boldsymbol{v} = (a,b)$.

Resposta: Se $\boldsymbol{v} \neq (0,0)$ a função $f((0,0)+t\boldsymbol{v}) = f(at,bt)$ é dada por

$$f(at,bt) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{(at)^2bt}{(at)^2+(bt)^2}\right) & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

e portanto para qualquer $t \in \mathbb{R}$ temos

$$f(at,bt) = \operatorname{sen}\left(\frac{a^2bt}{a^2+b^2}\right) \ .$$

Logo,

$$D_{\boldsymbol{v}}f(0,0) \quad = \quad \frac{d}{dt}f((0,0)+t\boldsymbol{v})\Big|_{t=0} = \left[\cos\left(\frac{a^2bt}{a^2+b^2}\right)\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right]\Big|_{t=0} = \frac{a^2b}{a^2+b^2} \ .$$

Se $\boldsymbol{v} = (0,0)$ então $f((0,0)+t\boldsymbol{v}) = f(0,0) = 0$, pelo que $D_{\boldsymbol{v}}f(0,0) = 0$.

[1,0] c) Indique em que pontos de $\mathbb{R}^2$ a função f é diferenciável.

Resposta: A função definida pela expressão $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ é um quociente de polinómios e por isso é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Portanto a função composta $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right)$ também é diferenciável nesses pontos, uma vez que sen é diferenciável. Se no ponto $(0,0)$ f fosse diferenciável ter-se-ia de ter, para qualquer $\boldsymbol{v}=(a,b)$,

$$D_{\boldsymbol{v}}f(0,0)=Df(0,0)\boldsymbol{v}$$

e portanto $D_{\boldsymbol{v}}f(0,0)$ teria de ser uma expressão linear em a e b, ao contrário do que se viu na alínea anterior. Logo, o domínio de diferenciabilidade de f é $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

[2,0] d) Verifique se a função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua no ponto $(0,0)$.

Resposta: Nos pontos $(x,y)\neq(0,0)$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\cos\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\ .$$

Portanto para quaisquer $x\neq 0$ e $y\neq 0$ temos $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)=1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)=0$, pelo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não pode ser uma função contínua no ponto $(0,0)$.

[2,0] 2. Seja $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ uma função diferenciável tal que $Dg(0,2,1)=\begin{bmatrix}5&3&2\\2&1&0\end{bmatrix}$. Seja ainda $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a função definida por $F(x,y,z)=(x\cos y, x\operatorname{sen} y, z)$. Calcule a derivada de $g\circ F$ no ponto $(2,\pi/2,1)$.

Resposta: A matriz Jacobiana de F num ponto arbitrário $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ é

$$DF=\begin{bmatrix}\cos y&-x\operatorname{sen} y&0\\ \operatorname{sen} y&x\cos y&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

e portanto

$$DF(2,\pi/2,1)=\begin{bmatrix}0&-2&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ .$$

Logo,

$$\begin{aligned}D(g\circ F)(2,\pi/2,1)&=Dg(F(2,\pi/2,1))DF(2,\pi/2,1)=Dg(0,2,1)DF(2,\pi/2,1)\\&=\begin{bmatrix}5&3&2\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-10&2\\1&-4&0\end{bmatrix}\ .\end{aligned}$$

[2,0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y)=x^2+2xy-2x$.

Resposta: A matriz Jacobiana de f é

$$Df=\begin{bmatrix}2x+2y-2 & 2x\end{bmatrix}$$

e por isso o único ponto crítico é $(0,1)$, que é a solução do sistema

$$\begin{cases}2x+2y-2&=&0\\2x&=&0\end{cases}$$

A matriz Hessiana num ponto arbitrário $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é

$$D^2 f = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e por isso $\det D^2 f(0,1) = -4$. Como o determinante é o produto dos valores próprios, conclui-se que estes têm sinais opostos. Logo, $D^2 f(0,1)$ é uma matriz indefinida e por isso $(0,1)$ é um ponto de sela.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ -1 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1\ ,\ 0 < z < 1\ ,\ x^2 + y^2 > 1\}\ ,$$

e seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Escreva uma expressão para $\int_A f$ em termos de integrais iterados da forma:

[2,0] (a) $\int(\int(\int f(x,y,z)\,dz)dy)dx$;

Resposta: $\displaystyle\int_A f = \int_{-1}^{1}\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1}\left(\int_0^1 f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$.

[2,0] (b) $\int(\int(\int f(x,y,z)dx)dy)dz$.

Resposta: $\displaystyle\int_A f = \int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_{-1}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dx + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dx\right)dy\right)dz$.

[2,0] 5. Calcule o volume da intersecção de uma bola de raio $R > 0$ em $\mathbb{R}^3$ com um cilindro de raio $r < R$ cujo eixo passa pelo centro da bola.

Resposta: Podemos assumir sem perda de generalidade que o centro da bola é a origem e que o eixo do cilindro é o eixo dos zz. Em coordenadas cilíndricas, o volume da intersecção é então dado por

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_0^{2\pi}\int_0^r\int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} \rho\,dz\,d\rho\,d\varphi = 2\pi\int_0^r 2\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho \\ &= 2\pi\left[-\frac{2}{3}\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\rho=0}^{\rho=r} = \frac{4\pi}{3}\left[R^3 - \left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\ . \end{aligned}$$

Note-se que, como seria de esperar, $V(0) = 0$ e $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

[3,0] 6. Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ existe para qualquer $j = 1, \ldots, n$. Diga, justificando, se é verdadeira a afirmação "g é diferenciável em $\boldsymbol{a}$ se e só se $D_{\boldsymbol{v}} g(\boldsymbol{a}) = Dg(\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}$ para qualquer $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$."

[Sugestão: considere uma função que em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ seja definida pela expressão $\dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}$.]

Resposta: Seja então $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Trata-se de uma função contínua, pois

$$\left|\frac{x^3 y}{x^4 + y^2}\right| \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^2}}\frac{|y|}{\sqrt{x^4+y^2}}|x| \leq \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{x^4+y^2}}\frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^4+y^2}}|x| \leq |x|$$

e portanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} = 0 \; .$$

É também claro que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{g(0,y)-g(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0 \; .$$

Por outro lado,

$$D_{(a,b)}g(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(ta,tb)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a^3 bt}{a^4 t^2 + b^2} = 0$$

para qualquer vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, onde os casos $b=0$ e $b \neq 0$ devem ser considerados separadamente. Deste modo, a função g satisfaz todas as condições da afirmação acima. No entanto, g não é diferenciável, uma vez que o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

não pode existir e ser zero:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x,x^2)}{\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^5}{(x^4+x^4)\sqrt{x^2+x^4}} = \frac{1}{2} \; .$$