APOIO ÀS FICHAS 3, 4

MARGARIDA BAÍA, DM, IST

I- Propriedades da derivada duma função segundo um vector (Ficha 3).

Proposição (Visto na aula teórica): Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D aberto. Suponhamos que f é diferenciável num ponto $p \in D$. Tem-se que:

$$D_v f(p) = Df(p) \cdot v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Nota: na fórmula anterior usamos a notação matricial dum vector (ie como matriz coluna).

Exemplo. Seja f definida por: $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Calcule $D_{(2,3)}f(0,0)$.

Resolução: Como f não é diferenciável em $(0,0)$ (visto na aula teórica) não podemos usar a proposição anterior. Obtemos $D_{(2,3)}f(0,0)$ recorrendo à definição. Temos que

$$D_{(2,3)}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2h,3h)}{h} = \frac{18}{4}.$$

Exemplo. Seja $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$. Calcule $D_{(2,3)}f(0,0)$.

Resolução: Como f é diferenciável em $(0,0)$ e $Df(0,0) = [0\,0]$ (fazer exercício 6, ficha 3), segue pela proposição anterior que:

$$D_{(2,3)}f(0,0) = 0.$$

II - Regra da cadeia (semelhante (mas mais simples) ao Exercício 6, Ficha 4).

Exemplo. Seja

$$h(x,y) = f\left(2x + y^3, f(x, xy^2)\right)$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

a) Obtenha $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ em função das derivadas parciais de f.

b) Supondo que $f(u,v) = u^3 + uv$ calcule $\frac{\partial h}{\partial x}(1,1)$.

Resolução: (Nota: pelo teorema da derivada da função composta sabemos que h é uma função diferenciável dado que $h = f \circ g$ com $g(x,y) = (2x+y^3, f(x,xy^2)$ que é diferenciável pela hipótese feita sobre f e pelo facto das suas duas primeiras componentes serem funções C^1)

a) Usamos a regra da cadeia (designando as variáveis de f por u, v i.e $f = f(u,v)$):

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2\frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y))\frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x,xy^2)\Big]$$

Definindo $l(x,y) = (x,xy^2)$ e usando novamente a regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[f(l(x,y))\Big] = \frac{\partial f}{\partial u}(l(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial v}(l(x,y))y^2$$

Assim:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2\frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y))\left[\frac{\partial f}{\partial u}(l(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial v}(l(x,y))y^2\right]$$

b) Usamos a). Se $f(u,v) = u^3 + uv$ então

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = 3u^2, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = u$$

Assim de a):

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,1) = 2\frac{\partial f}{\partial u}(g(1,1)) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(1,1))\left[\frac{\partial f}{\partial u}(l(1,1)) + \frac{\partial f}{\partial v}(l(1,1))\right]$$

Dado que $g(1,1) = (3,2)$ e $l(1,1) = (1,1)$ resulta que:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,1) = 66$$