APOIO À FICHA 8

MARGARIDA BAÍA, DM, IST

Apoio sobre a aplicação do teorema da função implícita.

A) Uma nota sobre terminologia.

Exemplo 1. A equação

$$y = 6x^2 + 3 \qquad (E)$$

define y explicitamente em função de x. Podemos escrever $y = h(x)$ onde $h(x) = 6x^2 + 3$ (não obstante (E) define x implicitamente em função de y).

Esta mesma equação pode ser escrita de forma equivalente como

$$6x^2 + 3 - y = 0,$$

mas neste caso já não descreve y de forma explicita em função de x (continua a definir x implicitamente em função de y).

Em nenhuma das formas anteriores estas equações descrevem x explicitamente em função de y. A descripção explicita de x neste exemplo daria lugar a duas equações: $x = \frac{1}{6}\sqrt{y-3}$, $x = -\frac{1}{6}\sqrt{y-3}$.

Exemplo 2. A equação $y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$ define x e y implicitamente. Consegue obter uma das variáveis explicitamente em função das outras?

B) Exemplos de motivação.

Exemplo 1. Equação de van der Waals (1873) (equação que descreve o estado de um gás tendo em conta as interações intermoleculares e o volume intrínseco ocupado pelas moléculas do mesmo).

$$\left[P + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right]\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT$$

onde:

- P: pressão do gás
- T: temperatura (absoluta) do gás
- V: volume do gás
- a, b: são constantes positivas e dependem do tipo de gás (por exemplo no caso do hélio: $a = 3.46\text{x}10^{-3}\,(Pa\,m^6)$, $b = 23.71\text{x}10^{-6}\,(m^3/\text{mol})$)
- n: número de moles do gás
- R: constante universal dos gases ($R = 8.3145(J/\text{mol}K)$)

Problema: Estudar a variação do volume V do gás em função da variação da pressão P e temperatura T.

Exemplo 2. Equação de Kepler (relaciona várias propriedades da órbita de um corpo sujeito a uma força central)

$$X - E\sin(X) = M$$

onde:

- E : excentricidade
- M : anomalia média
- X : anomalia excêntrica

Problema: Estudar a variação de X em função da variação de E e M.

Nos exemplos 1 e 2 existem quantidades de interesse (V e X respectivamente) que não são dadas de forma explicita. Isto sucede em muitas outros problemas (das engenharias, física, quimica, etc.) formulados através de fórmulas matemáticas e mesmo na definição de muitas linhas e superfícies como por exemplo: a superfície $x^2+y^2+z^2=1$ em $\mathbb{R}^3$, a linha $x^2+y^2=1$ em $\mathbb{R}^2$, a linha de A), etc.

Exemplo 3. Seja α um zero simples do polinómio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

(isto é suponhamos que $p(\alpha)=0$ e $p^{'}(\alpha) \neq 0$).

Pergunta: se os coeficientes de p forem ligeiramente alterados, será que o novo polinómio que se obtém tem uma raíz próxima de α?

Exemplo 4. Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ (suficientemente regular) determinar se F é localmente invertível numa vizinhança de um ponto $p \in D$. (Nota: o teorema da função inversa também dá resposta a este problema; uma vez que percebam ambos os teoremas, tentem perceber a relação entre ambos resultados).

C) Enunciado do teorema da função implícita (versão geral)

Notação prévia: Dados $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > m$, escrevemos um ponto de R^n da forma (x, y) com $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Teorema. Seja $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$, D aberto, $F \in C^k$. Seja $(x_0, y_0) \in D$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Supondo que

$$det\Big[\frac{\partial F}{\partial y}((x_0, y_0))\Big] \neq 0$$

pode-se garantir que existem vizinhanças $U \subset \mathbb{R}^N$ de (x_0, y_0), $V_{x_0} \subset \mathbb{R}^m$ de x_0, $V_{y_0} \subset \mathbb{R}^{n-m}$ de y_0 e uma função $h : V_{x_0} \to V_{y_0}$, $h \in C^k$, tal que

$$(*) \quad \{(x, y) \in U : \; F(x, y) = 0_{\mathbb{R}^{n-m}}\} = \{(x, y) : \; y = h(x), \; x \in V_{x_0}\}.$$

Nota:

- $(*)$ dito de outro modo: para cada $x \in V_{x_0}$ o valor $y = y(x)$ é o único número em V_{y_0} tal que $F(x, y) = 0$.
- A função h fica dada implicitamente pela equação $F(x, h(x)) = 0, \; x \in V_{x_0}$.
- Obtenção das derivadas de h? podem-se obter através da equação anterior como aplicação do teorema da derivada da composta.

- No caso em que $F(x,y) = 0$ define apenas uma equação i.e quando $n - m = 1$ ($m = n-1$) a condição

$$det\Big[\frac{\partial F}{\partial y}((x_0, y_0))\Big] \neq 0$$

significa simplesmente que

$$\frac{\partial F}{\partial y}((x_0, y_0)) \neq 0.$$

D) Exemplos semelhantes aos exercícios da Ficha 8

1) Seja $y + y^3 = x^2 + 2xz + 2z^2$.
   (a) Mostre que a equação $y + y^3 = x^2 + 2xz + 2z^2$ define localmente y como função de x e z (isto é $y = f(x,z)$) numa vizinhança do ponto $(0,0,0)$, onde f é uma função de classe C^1.
   Resolução: Aplicamos o teorema da função implícita à função

$$F(x,y,z) = y + y^3 - x^2 - 2xz - 2z^2.$$

   Temos que $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $F(0,0,0) = 0$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)|_{(0,0,0)} = [1 + 3y^2]|_{(0,0,0)} = 1 \neq 0,$$

   logo existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^3$ de $(0,0,0)$, uma vizinhança U de $(0,0)$ e uma função $f \in C^1(U)$ tal que

$$\{(x,y,z) \in V : \;\; F(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in R^3 : \;\; f(x,z) = y, \; (x,z) \in U\}.$$

   (b) Calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$.
   R: Dado que em particular em cada ponto $(x,z) \in U$

$$F(x, f(x,z), z) = 0$$

   ou equivalentemente

$$f(x,z) + f(x,z)^3 - x^2 - 2xz - 2z^2 = 0$$

   então (derivando em relação a x e a z)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,z) + 3f(x,z)^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,z) - 2x - 2z = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,z) + 3f(x,z)^2\frac{\partial f}{\partial z}(x,z) - 2x - 4z = 0$$

   Em particular se $(x,y) = 0$ e dado que $f(0,0) = 0$ segue-se que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0) = 0$.

(c) Prove que f possui um mínimo local no ponto $(0,0)$.
R: Calculemos a matriz Hessiana de f no ponto $(0,0)$. Para tal voltamos a derivar o sistema obtido acima. Assim para cada ponto $(x,z) \in U$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,z) + 6f(x,z)^2 \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,z)\right]^2 + 3f(x,z)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,z) - 2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,z) + 6f(x,z)^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,z)\frac{\partial f}{\partial z}(x,z) + 3f(x,z)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,z) - 2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,z) + 6f(x,z)^2 \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\right]^2 + 3f(x,z)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,z) - 4 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,z) + 6f(x,z)^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,z)\frac{\partial f}{\partial z}(x,z) + 3f(x,z)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,z) - 2 = 0$$

Em particular se $(x,y) = 0$, dado que $f(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0) = 0$, então[1]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0), \ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4.$$

Assim

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Os valores própios de $H_f(0,0)$ são $\lambda_1 = 3+\sqrt{5}$ e $\lambda_2 = 3-\sqrt{5}$. como ambos são positivos, $(0,0)$ é um ponto de mínimo local.

2) Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + e^{y+z} + (x+y)\cos z = 3 \\ (x+y)\sin z + e^{y+z} = 1 \end{cases}$$

Prove que o sistema permite definir x e y como funções continuamente diferenciáveis de z numa vizinhança de $(1,0,0)$. Representando essas funções por x e y, calcule a derivada $\dfrac{dy}{dz}(0)$.

Resolução: Aplicamos o teorema da função implícita a

$$F(x,y,z) = \Big(x^2 + e^{y+z} + (x+y)\cos z - 3, (x+y)\sin z + e^{y+z} - 1\Big).$$

Verificamos as condições do teorema. Temos que $F \in C^\infty$ visto que é a soma, produto e composta de funções polinomais com a exponencial, o seno e o cosseno. Tem-se, também, que $F(1,0,0) = (0,0)$ e que

$$\det\left[\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}(1,0,0)\right] = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

[1] f é de facto C^∞ por sê-lo F.

Então, pelo teorema da função implícita, o sistema anterior define (x, y) como funções C^∞ de z numa vizinhança U de $(1, 0, 0)$ existindo uma vizinhança de $z = 0$, V_0 e funções $x = x(z)$ e $y = y(z)$ (C^∞) definidas nessa vizinhança tais que

$$\{(x, y, z) \in U : \ \ F(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) : \ \ x = x(z), y = y(z) \ z \in V_0\}.$$

Do facto que $F(x(z), y(z), z) = 0$ para $z \in V_0$, i.e

$$\begin{cases} x(z)^2 + e^{y(z)+z} + (x(z) + y(z)) \cos z = 3 \\ (x(z) + y(z)) \sin z + e^{y(z)+z} = 1 \end{cases}$$

vem, derivando em relação a z

$$\begin{cases} 2x(z)x'(z) + (y'(z) + 1)e^{y(z)+z} + (x'(z) + y'(z)) \cos z - (x(z) + y(z)) \sin z = 0 \\ (x'(z) + y'(z)) \sin z + (x(z) + y(z)) \cos z + (y'(z) + 1)e^{y(z)+z} = 0 \end{cases}$$

de onde, substituindo $z = 0$, (atendendo a que $x(0) = 1$, $y(0) = 0$)

$$\begin{cases} 2x'(0) + (y'(0) + 1) + (x'(0) + y'(0)) = 0 \Longleftrightarrow 3x'(0) + 2y'(0) = -1 \\ 1 + (y'(0) + 1) = 0 \end{cases}$$

o que implica que

$$y'(0) = -2.$$

Bom estudo!