

APOIO À FICHA 7

MARGARIDA BAÍA, DM, IST

(Alguns) Exemplos das aulas teóricas de 5-4-2019 (revistos e com solução detalhada).

1. Calcule o volume de

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \geq 0\}$$

Resolução: Queremos calcular:

$$Vol(\mathcal{R}) = \int \int \int_{\mathcal{R}} 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Atendendo a que \mathcal{R} é a metade de cima da bola centrada na origem e de raio 4, será mais fácil efectuar este integral triplo através de uma mudança de coordenadas a coordenadas esféricas. Escrevemos os pontos (x, y, z) de \mathcal{R} em coordenadas esféricas:

$$x = r \cos \theta \sin \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \varphi$$

com $\theta \in]0, 2\pi[$, $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ e $r \in]0, 4[$ (como explicado na aula, nestas coordenadas: θ é o ângulo entre o eixo OX e a projecção do ponto no plano XY, φ é o angulo entre o eixo positivo OZ e o ponto, r é a distância do ponto à origem; é claro (trigonometria básica) que $z = r \cos \varphi$ e não $z = r \sin \varphi$!!! Os pontos de \mathcal{R} não cobertos por esta representação têm conteúdo nulo em \mathbb{R}^3 pelo que o volume não se altera).

Definindo:

$$g(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$$

pode-se ver que o Jacobiano desta transformação é:

$$|\det Dg(r, \theta, \varphi)| = r^2 \sin(\varphi)$$

(verifiquem: calculem a matriz Jacobiana de g e façam o seu determinante; devem usar identidades trigonométricas para simplificarem os cálculos).

Assim, pelo teorema de mudança de coordenadas:

$$Vol(\mathcal{R}) = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^4 r^2 \sin(\varphi) \, dr \right] d\varphi \right] d\theta = 2\pi \left(\int_0^4 r^2 \, dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) \, d\varphi \right) = \frac{2\pi}{3} 4^3$$

(comparar com o que sabiam do liceu!).

3. Seja

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$$

i) Calcule

$$Vol(\mathcal{R})$$

ii) Calcule

$$\int \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2$$

Resolução: Dado que \mathcal{R} é o sólido entre o plano $z = 2$ e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, é fácil descrevê-lo em função das suas coordenadas cilíndricas (conforme explicado na aula: ρ a distância da projecção do ponto no plano XY ao eixo OZ, θ o ângulo entre o eixo OX e a projecção do ponto no plano XY e z a terceira coordenada do ponto). Reparem que em coordenadas cilíndricas o plano é dado à mesma pela equação $z = 2$ e o cone por $z = \rho$ (com $\theta \in [0, 2\pi]$). As integrandas de ambos os exercícios são também simples de descrever em coordenadas cilíndricas. Em coordenadas esféricas a descrição de \mathcal{R} seria mais complicada, por exemplo, no plano $z = 2$ obteríamos que $r = \frac{2}{\cos \varphi}$ (dado que $z = r \cos \varphi$).

i) Escrevemos os pontos (x, y, z) de \mathcal{R} em coordenadas cilíndricas:

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = z.$$

Conforme explicado acima $\theta \in]0, 2\pi[$ e para cada θ obtemos que em \mathcal{R} : $\rho < z < 2$ i.e $\rho \in]0, 2[$ e $z \in]\rho, 2[$ (a menos de um conjunto de conteúdo nulo em \mathbb{R}^3). Por tanto pelo teorema de mudança de coordenadas (neste caso conforme explicado na aula o Jacobiano é ρ):

$$Vol(\mathcal{R}) = \int \int \int_{\mathcal{R}} 1 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \left[\int_{\rho}^2 \rho dz \right] d\rho \right] d\theta = 2\pi \int_0^2 (2\rho - \rho^2) d\rho = \frac{8}{3}\pi.$$

ii) Usando o que se obteve em i) (notem que em coordenadas cilíndricas $x^2 + y^2 = \rho^2$) obtemos agora

$$\int \int \int_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \left[\int_{\rho}^2 \rho^3 dz \right] d\rho \right] d\theta = \frac{26}{5}\pi.$$

2. Seja

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$$

i) Calcule $Vol(\mathcal{R})$ usando coordenadas esféricas.**ii) Calcule $Vol(\mathcal{R})$ usando coordenadas cilíndricas.****iii) Calcule $\int \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$**

Resolução: Neste caso \mathcal{R} é o sólido entre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e o cone $\sqrt{x^2 + y^2} = z$.

i) Escrevemos os pontos (x, y, z) de \mathcal{R} em coordenadas esféricas:

$$x = r \cos \theta \sin \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \varphi.$$

Temos que $\theta \in]0, 2\pi[$. Notem que para cada θ fixo o corte de \mathcal{R} nestas coordenadas vem descrito por $r \in]0, \sqrt{2}[$ (dado que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ corresponde a $r = \sqrt{2}$) e $\varphi \in]0, \frac{\pi}{4}]$ (dado que $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z$; $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ corresponde a $\varphi = \frac{\pi}{4}$).

Assim, pelo teorema de mudança de coordenadas (como nos exercícios acima):

$$\text{Vol}(\mathcal{R}) = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \sin(\varphi) dr \right] d\varphi \right] d\theta = \frac{4\pi}{3}(\sqrt{2} - 1).$$

ii) Escrevemos os pontos (x, y, z) de \mathcal{R} em coordenadas cilíndricas:

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = z.$$

Como em *i*) temos que $\theta \in]0, 2\pi[$ e para cada θ obtemos que em \mathcal{R} : $\rho < z$ e $\rho^2 + z^2 < 2$. Descrivendo esta região no plano ρZ deduzimos que: $\rho \in]0, 1[$ e $z \in]\rho, \sqrt{2 - \rho^2}$ (notem que $z = \rho$ é uma recta e $\rho^2 + z^2 = 2$ uma circunferência neste plano).

Assim:

$$\text{Vol}(\mathcal{R}) = \int \int \int_{\mathcal{R}} 1 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left[\int_{\rho}^{\sqrt{2 - \rho^2}} \rho dz \right] d\rho \right] d\theta = \frac{4\pi}{3}(\sqrt{2} - 1).$$

iii) Dado que em coordenadas esféricas $f(x, y, z) = r^2$ é mais fácil usar este tipo de coordenadas para obter o integral pedido. Em coordenadas cilíndricas $f(x, y, z) = \rho^2 + z^2$ e o integral não será simples (comparar com a descrição de \mathcal{R}). Solução: $2\pi(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$

Outros exemplos de apoio à ficha 7.

1. Calcule o seguinte integral

$$I = \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$$

onde $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 1, y > 0\}$$

usando se preciso coordenadas polares modificadas (**2c, Ficha 7**).

Resolução: Notem que chamando $u = x + 1$ podemos dizer que $u^2 + y^2 = 1$ e $y > 0$, isto é, (u, y) descrevem os pontos de meio disco centrado na origem e de raio 1. Em coordenadas polares teríamos então que neste disco:

$$u = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

com $\theta \in]0, \pi[$ e $r \in]0, 1[$. Assim poderíamos dizer que em \mathcal{R} :

$$x = r \cos(\theta) - 1$$

$$y = r \sin(\theta)$$

com $\theta \in]0, \pi[$ e $r \in]0, 1[$. Atendendo a que o Jacobiano (em módulo) da mudança de coordenadas

$$g(r, \theta) = (r \cos(\theta) - 1, r \sin(\theta)), \quad \theta \in]0, \pi[, r \in]0, 1[$$

é r (verificar!), segue-se (usando o teorema de mudança de coordenadas) que:

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^\pi f(r \cos(\theta) - 1, r \sin(\theta)) r d\theta \right] dr = \int_0^1 \left[\int_0^\pi (r^2 - 2r \cos(\theta)) r d\theta \right] dr = \frac{\pi}{4}$$

2. Calcule $I'(0)$ onde

$$I(t) = \int_0^1 \sin(tx^2) dx.$$

(semelhante ao exercício 8, Ficha 7)

Resolução: Notem que $t \rightarrow I(t)$ é uma função de $CDI-I$ (bem definida porque a função $x \rightarrow \sin(tx^2)$ é continua para cada t fixo). Caso exista

$$I'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(h) - I(0)}{h}.$$

Designando $f(x, t) = \sin(tx^2)$ segue-se que

$$I'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_0^1 (f(x, h) - f(x, 0)) dx \right]$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo ($CDI-I$) (atendendo às propriedades de f podemos usar)

$$I'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_0^1 \left(\int_0^h \frac{\partial f}{\partial t}(x, s) ds \right) dx \right].$$

Usando agora o Teorema de Fubini

$$I'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_0^h \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x, s) dx \right) ds \right],$$

de onde novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$I'(0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) dx = \int_0^1 x^2 dx = 1/3.$$

Nota: neste exemplo foi deduzido um caso simples da denominada Regra de Leibniz; notem que o que se fez para $t = 0$ podia-se ter feito para outros t chegando a que em geral

$$I'(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Notem também que dedução desta fórmula podia ser estendida a outras integrandas desde que se possam aplicar os passos acima.

3. Calcule $G'(t)$ onde

$$G(t) = \int_{2t}^{3t} \sin(tx^2) dx.$$

Resolução: Basta repararem que

$$G(t) = F(t, 2t, 3t)$$

onde

$$F(t, u, v) = \int_u^v f(x, t) dx$$

e $f(x, t) = \sin(tx^2)$. Usem o teorema da derivada da composta (não esquecer o teorema fundamental do cálculo e o que se fez no exercício 2) acima). Vejam que:

$$G'(t) = \int_{2t}^{3t} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx - 2f(2t, t) + 3f(3t, t)$$

Sugestão para o exercício 3, alínea a): designando por $g(u, v) = (2u+v, u^2-v)$ determine primeiro a imagem por g dos vértices de T . As linhas que delimitam T transformar-se-ão noutras linhas: determinar quais...

Sugestão para o exercício 4: Considere a mudança de variáveis: $u = x + y$, $v = y - x$...

Solução do exercício (alínea b)) de revisão da aula teórica de hoje (12-04-2019):

$$Vol(R) = \frac{\pi}{12}$$

Bom estudo!