APOIO À FICHA 13

MARGARIDA BAÍA, DM, IST

I. Exemplos resolvidos.

(1) Sejam $F(x,y,z) = (5y, 5x + e^{y^2}, yz)$ e $G(x,y,z) = (e^x, e^y, z^3)$.

i) Indique justificadamente se os campos F e G são conservativos nos seus domínios.

Resolução: Temos que $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(G) = \mathbb{R}^3$. Dado que

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z) = z, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) = 0,$$

o campo F não é fechado em $\mathbb{R}^3$ e, portanto, não pode ser conservativo em $\mathbb{R}^3$. [1] Por sua vez, como $G(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z) = e^x + e^y + \frac{z^4}{4}$, podemos concluir que o campo G é conservativo em $\mathbb{R}^3$.

Nota: Usando uma terminologia equivalente podemos afirmar que F não é um campo irrotacional em $\mathbb{R}^3$. [2] Por outro lado, como G é um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$ sabemos que é necessariamente fechado e por tanto um campo irrotacional.

ii) Seja

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1\}.$$

Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo $F + G$ ao longo da linha L percorrida uma vez no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0,0,100)$.

Resolução: A linha L é o bordo (por exemplo) da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, \ z = 1\}$$

que orientamos com a normal $n(x,y,z) = (0,0,1)$ para que ambas as orientações sejam compatíveis (a do bordo e a da superfície). Aplicando o teorema de Stokes, obtem-se

$$\int_L (F+G) \cdot dg = \iint_S \mathrm{rot}(F+G) \cdot n.$$

Da nota anterior: $\mathrm{rot}(G) = (0,0,0)$ logo

$$\int_L (F+G) \cdot dg = \iint_S \mathrm{rot}(F) \cdot n = \iint_S (z,0,0) \cdot (0,0,1) = 0.$$

[1] Recordar: ser campo fechado é uma condição necessária para um campo ser conservativo.

[2] Um campo vectorial $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diz-se irrotacional em D se $\mathrm{rot}(F)(x,y,z) = (0,0,0)$ para cada ponto $(x,y,z) \in D$. Vimos na aula que um campo F é fechado em D sse $\mathrm{rot}(F)(x,y,z) = (0,0,0)$ em D.

Nota: Sabemos que o campo G é um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$ logo pelo teorema fundamental do cálculo de integrais de linha já sabiamos que

$$\int_L G \cdot d\gamma = 0.$$

(2) Use o teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional do campo vectorial $H(x,y,z) = (y, -x, z^3)$, através da superfície dada por $z = 1 - x^2 - y^2$, $z > 0$, orientada com a normal com terceira componente positiva.

Resolução: Notemos que o bordo de S (circunferência) orientado de forma compatível com a orientação de n pode ser descrito pela função $g(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Pelo teorema de Stokes, tem-se

$$\iint_S \mathrm{rot} H \cdot n = \oint_{\partial S} H \cdot dg = \int_0^{2\pi} H(g(t)) \cdot g'(t) dt = -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi.$$

(3) Seja

$$H(x,y,z) = \left(\frac{-z}{x^2+z^2}, y, \frac{x}{x^2+z^2} \right)$$

i) Justifique que o campo H é um campo fechado no seu domínio.

Resolução: Temos que $\mathrm{dom}(H) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,y,0),\ y \in \mathbb{R}\}$. Como (ver!) para cada $(x,y,z) \in \mathrm{dom}(H)$ temos que $\mathrm{rot}(H) = (0,0,0)$ concluimos que H é um campo fechado no seu domínio.

ii) Calcule o trabalho de H ao longo da linha

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + z^2 = 1,\ y = 0\}$$

no sentido horário quando visto por um observador situado no ponto $(0, 100, 0)$.

Resolução:
Usamos a definição de trabalho, e como tal começamos por parametrizar L (circunferência unidade centrada na origem e no plano $y = 0$; notem que uma particula situada nesta linha em $x = 0$ iria no sentido de $z > 0$). Seja

$$g(\theta) = (\cos(\theta), 0, \sin(\theta)),\ \theta \in [0, 2\pi]$$

uma sua parametrização no sentido pedido. Então

$$\int_L H \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} H(g(\theta)) \cdot g'(\theta)\, d\theta = 2\pi$$

Nota: O campo H não está definido num ponto na região S (superfície) encerrada por esta linha (pensar!); em particular não é um campo C^1 em nenhum aberto que contenha $\overline{S}$... A tentação seria usar o teorema de Stokes e dizer que o trabalho dá zero, mas não o poderemos aplicar (de facto não conseguimos encontrar uma variedade que tenha como bordo esta linha e à qual se possa aplicar o teorema (pensar!)...)

iii) Calcule o trabalho de H ao longo da linha

$$L_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{x^2}{100} + \frac{z^2}{10} = 1,\ y = 0 \right\}$$

no sentido anti-horário quando visto por um observador situado no ponto $(0, 100, 0)$.

Resolução: Aplicamos o teorema de Stokes à superfície plana

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{100} + \frac{z^2}{10} < 1, \ y = 0\right\}$$

orientada com a normal (unitária) $n = (0,1,0)$. Notemos que o bordo de S, ∂S, são as linhas L e L_1 (orientações compatíveis com n). Pelo teorema, dado que $\mathrm{rot}(H) = (0,0,0)$ vem que

$$0 = \int_{\partial S} H \cdot d\gamma,$$

de onde

$$\int_{L_1} H \cdot d\gamma = -\int_L H \cdot d\gamma = -2\pi.$$

(4) Seja F um campo vectorial fechado e definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$. Seja C a circunferência dada por $z = 0, \ x^2 + y^2 = 1$ e descrita uma vez no sentido horário quando vista do ponto $(0,0,10)$. Sabendo que $\oint_C F \cdot dg = 1$, calcule os valores possíveis do integral $\oint_L F \cdot dg$ em que L designa uma linha regular, simples e fechada sobre a superfície cilíndrica descrita pela equação $x^2 + y^2 = 1$.

Resolução:

A linha L só pode ser de um de dois tipos. Ou efectua uma volta completa em torno do eixo Oz ou não. Dado que o campo é fechado, pelo teorema de Stokes, os valores possíveis são: $-1, 0, 1$.