

APOIO À FICHA 11

MARGARIDA BAÍA, DM, IST

I. Noção de integral de linha de um campo vectorial. Exemplos de motivação.

Exemplo 1: Campo gravítico (criado por uma massa pontual)

Suponhamos uma massa pontual M colocada na origem de um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^3 . A lei da gravitação universal de Newton¹ diz que a força de atracção que esta massa exerce sobre uma outra qualquer massa pontual m situada num ponto (x, y, z) vem dada por:

$$F(x, y, z) = -\frac{GMm}{\|(x, y, z)\|^3}(x, y, z),$$

onde G é a constante de gravitação universal.²

Nota 1: $\|F(x, y, z)\| = \frac{GMm}{\|(x, y, z)\|^2}$

Nota 2: $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo gradiente (ou conservativo). Com efeito

$$F(x, y, z) = \nabla\varphi(x, y, z)$$

onde $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{GMm}{\|(x, y, z)\|}$$

Pergunta: Trabalho de F para deslocar a partícula de massa m de um ponto $p \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$ a outro $q \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$?

Resolução: Pelo Teorema fundamental do cálculo para os integrais de linha (TFCIL), atendendo a que $F = \nabla\varphi$

$$\int F \cdot d\gamma = \varphi(q) - \varphi(p) = GMm \left[\frac{1}{\|q\|} - \frac{1}{\|p\|} \right].$$

Exemplo 2: Campo eléctrico (em breve)

Exemplo 3: Campo electromagnético (em breve)

II. Exercícios resolvidos.

¹Formulada por Isaac Newton (1642-1727) e publicada em 1687.

²Nota: F aponta na direcção da massa que cria o campo.

- 1) Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x, y) = (y, 1 - x).$$

Calcule o trabalho realizado por F ao longo do segmento de recta entre o ponto $(-1, 0)$ e o ponto $(1, 0)$.

Resolução: Usamos a definição de trabalho. Precisamos de uma representação paramétrica deste segmento de recta, que claramente é

$$\gamma(x) = (x, 0), x \in [-1, 1].$$

Assim

$$\int F \cdot \partial\gamma = \int_{-1}^1 F(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x) dx = 0$$

Nota: $F(x, 0) = (0, 1 - x)$ i.e F é perpendicular ao segmento de recta e, portanto, era de esperar que o trabalho fosse nulo.

II. Noção de campo gradiente (conservativo): exercícios resolvidos.

- 1) Diga, justificando se o campo $F(x, y, z) = (-y, x, zx)$ é um campo gradiente no seu domínio.

Resolução: Como:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) = -1 \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) = 1$$

concluimos que o campo F não é fechado no seu domínio i.e em \mathbb{R}^3 . Assim F não pode ser um campo gradiente em \mathbb{R}^3 . (Recordar: vimos que ser campo fechado é condição necessária para ser campo gradiente)

- 2) Calcule $\int_C F \cdot \partial\gamma$ onde

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 1\}$$

é considerada num sentido anti-horário quando vista do ponto $(0, 0, 100)$ e F é o campo vectorial do exercício 1).

Resolução: Usamos a definição de integral de linha. Precisamos de uma representação paramétrica de C (circunferência de raio 2 centrada no eixo Oz e contida no plano $z = 1$). Usando coordenadas cilíndricas, consideramos

$$\gamma(\theta) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 1), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Notem que: $\gamma(0) = (2, 0, 1)$, $\gamma(\pi/2) = (0, 2, 1)$, etc... i.e estamos a percorrer C no sentido pedido.

Assim:

$$\int F \cdot \partial\gamma = \int_0^{2\pi} F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} 4 d\theta = 8\pi.$$

3) Calcule

$$\int H \cdot \partial\gamma$$

onde $H(x, y, z) = (e^x, e^y, e^z)$ e C é a linha do exercício 2).

Resolução: Começamos por notar que H é um campo gradiente no seu domínio i.e em \mathbb{R}^3 . De facto

$$H(x, y, z) = \nabla\varphi(x, y, z)$$

onde $\varphi(x, y, z) = e^x + e^y + e^z$. Assim, pelo teorema fundamental do integral de linhas (dado na aula):

$$\int H \cdot \partial\gamma = \varphi(\gamma(2\pi)) - \varphi(\gamma(0)) = 0$$

dado que C é uma linha fechada ($\gamma(0) = \gamma(2\pi)$).

Bom estudo!