APOIO À FICHA 10

MARGARIDA BAÍA, DM, IST

I. Problema da determinação de extremos duma função sujeita a uma ou mais restrições (extremos condicionados).

A) Exemplos de motivação/aplicação.

Problema 1. Uma empresa pretende construir um modelo de caixa de cartão (sem tampa e com base rectangular) de modo a que o volume do seu interior seja máximo, usando apenas 12 metros quadrados de cartão na sua construção. Objectivo deste problema: determinar as dimensões desta caixa.

Possível formulação do problema 1. Chamando x, y, z às dimensões da caixa deste problema (largura, profundidade, altura), pretendemos maximizar

$$V(x, y, z) = xyz \quad \text{(volume)}$$

sujeito à restrição

$$A(x, y, z) = 12$$

onde $A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ (área lateral da caixa).

Problema 2. Uma empresa estima que o lucro diário (em euros) da produção de

- x miligramas de um solvente S_1,
- y miligramas de um solvente S_2,
- z miligramas de um solvente S_3,

seja dado pela função

$$L(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2,$$

e o seu respectivo custo por

$$C(x, y, z) = 2x + 3y + z.$$

Pergunta: que quantidade de solvente S_i $(i = 1, 2, 3)$ deve esta empresa produzir diariamente para ter um lucro máximo com um gasto de 100 euros?

Possível formulação do problema 2. Devemos determinar o ponto (x, y, z) de máximo da função L sujeito à restrição

$$C(x, y, z) = 100.$$

Problema 3. Um aluno estagiário numa empresa agropecuária pretende construir um reservatório cilindrico fechado com diâmetro d e altura h para armazenamento de uma tonelada de trigo, a partir do corte de uma chapa de uma dada espessura. Pergunta: diâmetro e altura deste reservatório de modo a que este aluno use a menor quantidade de chapa possível?

Possível formulação do problema 3. Sabemos que a área lateral de um cilindro de diâmetro d e altura h é dada [1]

$$A(d,h) = 2\pi\Big(\frac{d}{2}\Big)^2 + \pi d h$$

e que o volume é:

$$V(d,h) = \pi\Big(\frac{d}{2}\Big)^2 h$$

Devemos determinar (h,d) o ponto de mínimo da função A sujeito à restrição

$$V(d,h) = 1000.$$

Problema 4. Qual o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ mais próximo de $(3,1,-1)$?

Possível formulação do problema 4. Devemos descobrir o ponto (x,y,z) de mínimo da função

$$f(x,y,z) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

restricto à condição

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Atendendo a que $h(t) = \sqrt{t}$, $t \geq 0$ é uma função crescente, bastará determinar o ponto (x,y,z) de mínimo da função

$$g(x,y,z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

(porquê? pensar...) restricto à condição

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Problema 5. Determine três números positivos cuja soma seja 120 e o seu produto o máximo possível. *Possível formulação do problema 5?*

Problema 6. Determine a distância mínima da origem à linha

$$L = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 8, \ 2x - y + 3z = 28\}$$

Possível formulação do problema 6?

Todos estes problemas podem-se resolver como aplicação do Teorema dos multiplicadores de Lagrange visto nas aulas teóricas. Deixo-os como desafio.

Nota 1: podem-se encontrar outras aplicações em problemas específicos de programação linear, modelos matemáticos de várias áreas que envolvam minimizar ou maximizar uma dada energia sujeita a uma ou várias restrições, etc... (estes problemas já saem dentro do âmbito de CDI-II).

Nota 2: Em alguns casos, podemos obter os pontos de extremo de uma função restricta a uma ou várias condições de forma fácil (por exemplo: o problema resultante traduz-se em determinar os extremos de uma função de uma varíavel)

Exemplo: Determinar os pontos de extremos da função $f(x,y) = xy$ restricta à recta

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = 1 - x\}$$

[1] Pode confirmar esta fórmula do secundário uma vez que estude a matéria do Capítulo 7; fica como desafio. Atenção: ao contrário que neste exemplo, regra geral nas aulas o termo cilindro refere-se à superfície cilindrica.

Possível resolução: Procuramos os pontos $(x, 1-x)$ onde $f(x, 1-x) = x(1-x)$ alcance um valor extremo. Este problema reduz-se a estudar os pontos de extremos da função de CDI-I

$$x \to x(1-x), \ x \in \mathbb{R},$$

que claramente (porquê? pensar...) alcança um valor máximo (absoluto, de facto) no ponto $x = 1/2$ (e não alcança valor mínimo em $\mathbb{R}$). Assim $f\lfloor_R$ alcança um máximo (absoluto) no ponto $(1/2, 1/2)$. O seu valor máximo nesta recta é: $f(1/2, 1/2) = 1/4$.

B) Alguns exemplos resolvidos semelhantes aos problemas da ficha 10.

1. Determine os extremos de $f(x, y) = y$ na elipse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2xy + 2y^2 = 4\}$$

Resolução: Notemos que os pontos de E são tais que $F(x, y) = x^2+2xy+2y^2-4 = 0$. Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange (ver que as condições são verficadas) se um ponto (x, y) é um ponto de extremo de $f\lfloor E$ então: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x, y) = 0, \ \nabla f(x, y) = \lambda \nabla F(x, y)$$

i.e

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 = 4 \\ 0 = \lambda(2x + 2y) \\ 1 = \lambda(2x + 4y) \end{cases}$$

É fácil ver que este sistema tem duas soluções: $(2, -2)$ e $(-2, 2)$. Por outro lado, pelo Teorema de Weierstrass, dado que f é contínua e E é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ (é? pensar...) sabemos que existem máximos/mínimos absolutos de f em E. Concluimos então que estes dois pontos são pontos de extremos de $f\lfloor E$, sendo o primeiro um ponto de mínimo ($f(2, 2) = -2$) e o outro um ponto de máximo ($f(2, 2) = 2$).

2. Determine o ponto de

$$L = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ x + z = 1\}$$

que apresenta maior terceira coordenada.

Resolução: Neste caso os pontos de L são tais que $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z, x + z - 1) = (0, 0)$. Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange (ver que as condições são verficadas) se um ponto (x, y, z) é um ponto de extremo de $f\lfloor L$, onde $f(x, y, z) = z$, então: $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x, y, z) = (0, 0, 0), \ \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla F_1(x, y, z) + \mu \nabla F_2(x, y, z)$$

onde $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ e $F_2(x, y, z) = x + z - 1$, i.e,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + z = 1 \\ 0 = \lambda 2x + \mu \\ 0 = \lambda 2y \\ 1 = -\lambda + \mu \end{cases}$$

É fácil ver que este sistema tem duas soluções:

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0, \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = p_1$$
$$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0, \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = p_2$$

Por outro lado, pelo Teorema de Weierstrass, dado que f é contínua e L é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$ (é? pensar...) sabemos que existem máximos/mínimos absolutos de f em L. Concluimos então que estes dois pontos são pontos de extremos de $f\lfloor L$. Como $f(p_2) > f(p_1)$ o ponto p_2 é um ponto de máximo de $f\lfloor L$.

C) Prova do teorema enunciado na aula.

Noção prévia: Dada $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, M uma variedade-m em $\mathbb{R}^n$, $M \subset D$, dizemos que p é um ponto de máximo (mínimo) relativo (ou local) de $f\lfloor_M$ se existe uma vizinhança $V = V(p) \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) \leq f(p), \quad \forall x \in M \cap V.$$
$$(\geq)$$

Neste caso dizemos que $f(p)$ é um valor máximo (mínimo) local de $f\lfloor_M$. Ponto de extremo de $f\lfloor_M$: qualquer ponto que seja máximo ou mínimo local de $f\lfloor_M$.

Nota: $M \cap V$ é o que se denomina uma vizinhança de p em M.

Teorema (condição necessária). Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D aberto, $f \in C^1(D)$ e M uma variedade-m em $\mathbb{R}^n$, $M \subset D$. Se $p \in M$ for um ponto de extremo de $f\lfloor_M$ então

$$\nabla f(p) \in \Big(T_p M\Big)^\perp$$

Prova: Por hipótese sabemos que p é um ponto de extremo de $f\lfloor_M$. Sem perda de generalidade assumamos que se trata de um máximo local. Isto significa que existe uma vizinhança $V = V(p) \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) \leq f(p), \quad \forall x \in M \cap V.$$

Também sem perda de generalidade (caso contrário consideramos uma vizinhança V menor) admitamos que

$$M \cap V = \{g(t) : \quad t \in A\}$$

$g : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $g \in C^1$, $car Dg(t)$ máxima $\forall t \in A$ (i.e que esta vizinhança de p é parametrizada pela função g).

Seja $t_0 \in A$ tal que $p = g(t_0)$. Em particular teremos que

$$f(g(t_0)) \geq f(g(t)), \quad \forall t \in A,$$

o que implica que t_0 seja um ponto de máximo de

$$h(t) = (f \circ g)(t),\ t \in A.$$

Assim (pelo que aprederam no Capítulo 3; notem que $h : A \to \mathbb{R}$)

$$\nabla h(t_0) = 0$$

o que implica (pelo teorema da derivada da composta)

$$Df(g(t_0)) \cdot Dg(t_0) = 0$$

i.e $\nabla f(g(t_0)) = \nabla f(p)$ é um vector perpendicular às colunas da matriz $Dg(t_0)$ (que conforme vimos na aula geram o T_pM). Assim

$$\nabla f(p) \in \Big(T_pM\Big)^{\perp}.$$

II. Integrais de linha de campos escalares em variedades diferenciáveis.

A) Exemplos de motivação/aplicação.

Problema 1. Determine o comprimento dos cabos principais duma ponte suspensa sob a acção apenas do seu própio peso (ou de uma dada linha de alta tensão).

Formulação matemática deste problema: atendendo a que a catenária é a forma geométrica que mais se adequa à geometria destes cabos/linhas quando sujeitos apenas ao carregamento do seu própio peso, o problema reduz-se a calcular o comprimento duma catenária.

Problema 2. Determine o comprimento dos cabos principais da ponte 25 de Abril.

Formulação matemática deste problema: atendendo a que estes cabos após a colocação do tabuleiro da ponte desenvolveram a forma de uma parábola, o problema reduz-se a calcular o comprimento dum arco de parábola.

Problema 3. Determine a área da superfície externa duma torre de refrigeração hiperbólica.

Formulação matemática deste problema: determinar a área duma porção de hiperboloide de uma folha.

Problema 4. Determine a área de um diabolo.

Formulação matemática deste problema: determinar a área de duas semiesferas.

Problema 5. Determinar a área exterior do tabuleiro de uma ponte metálica pedonal curva (em viga caixão) com o objectivo de lhe aplicar posteriormente pintura anticorrosiva.

Formulação matemática deste problema: determinar a área de uma superfície curva.

Problema 6. Pretende-se determinar o comprimento total dos varões de aço necessários para a construção de um silo de 15 metros de altura (com secção circular) em betão armado. Suponha-se que o raio exterior do silo é de 5 metros e o raio interior de 4.8 metros, que os varões de aço que se pretendem usar têm um diâmetro de 10mm e que se querem colocar na vertical com um espaçamento de 20 cm.

Formulação matemática deste problema: determinar o comprimento de muitas circunferências de vários raios.

Nota: em todas estas aplicações neglegenciamos a espessura destas estructuras, de modo a tratá-las como linhas ou superfícies.

B) Definição e exemplos resolvidos.

Definição geral: Seja M uma variedade-m em $\mathbb{R}^n$ e $g : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ (aberto), $g = g(t)$, uma sua parametrização. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $M \subset D$. Definimos o integral de f em M por:

$$\underset{M}{\int \cdots \int} f = \underset{A}{\int \cdots \int} f(g(t))\sqrt{\det[Dg(t)^T Dg(t)]}\, dt$$

Observação 1: Notem que a definição de $\underset{M}{\int \cdots \int} f$ é dada por um integral do Capítulo 4 se $m > 1$ e de um integral de CDI-I se $m = 1$. As várias aplicações deste tipo de integral têm a ver com o siginificado da integranda como sucedia no Capítulo 4. A título de exemplo (veremos nas próximas aulas):

$$\text{Comprimento(M)} = \underset{M}{\int \cdots \int} 1 \quad (\text{no caso em que } M \text{ seja uma variedade-1})$$

$$\text{Área(M)} = \underset{M}{\int \cdots \int} 1 \quad (\text{no caso em que } M \text{ seja uma variedade-2})$$

$$\text{Massa(M)} = \underset{M}{\int \cdots \int} f \quad (M \text{ uma variedade-m geral e } f \text{ a densidade de massa de M})$$

etc...

Observação 2: Veremos também na aula que

$$\sqrt{\det[Dg(t)^T Dg(t)]} = ||g'(t)|| \ (\text{no caso em que } M \text{ seja uma variedade-1})$$

$$\sqrt{\det[Dg(t)^T Dg(t)]} = \left|\left|\frac{\partial g}{\partial t_1}(t)\text{x}\frac{\partial g}{\partial t_2}(t)\right|\right| \ (\text{no caso em que } M \text{ seja uma variedade-2; } t = (t_1, t_2))$$

Alguns exemplos resolvidos semelhantes aos problemas da ficha 10.

1. Dado

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2, \ 0 < x < 1\},$$

(a) Calcule a carga eléctrica de A sabendo que a sua densidade de carga eléctrica é dada por $\rho(x, y) = x$

Resolução: Por definição (analogamente ao visto no Cap. 4), a carga eléctrica de A, que designaremos por $C_e(A)$ é

$$C_e(A) = \int_A \rho.$$

Para calcular este integral (atendendo à sua definição), começamos por dar uma parametrização de A (arco de parábola):

$$g(x) = (x, x^2), \quad 0 < x < 1.$$

Assim:

$$C_e(A) = \int_0^1 \rho(g(x))||g^{'}(x)||\, dx = \int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{12}(5^{3/2} - 1)$$

(b) Calcule

$$\int_A y\sqrt{1+4x^2}$$

Resolução: Designando por $f(x,y) = y\sqrt{1+4x^2}$ e usando a definição de integral (uma vez que em (a) já parametrizámos A)

$$\int_A f = \int_0^1 f(g(x))||g^{'}(x)||\,dx = \int_0^1 x^2(1+4x^2)\,dx = \frac{17}{15}$$

2. Comprimento da catenária

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = R\cosh\left(\frac{x}{R}\right), \ -R \leq x \leq R\}$$

Resolução: Por definição

$$\text{Comp}(C) = \int_C 1.$$

Para calcular este integral começamos por dar uma parametrização de C

$$g(x) = \left(x, R\cosh\left(\frac{x}{R}\right)\right), \quad -R \leq x \leq R.$$

Assim:

$$\int_C 1 = \int_{-R}^{R} ||g^{'}(x)||\,dx = \int_{-R}^{R} \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{R}\right)}\,dx = \int_{-R}^{R} \cosh\left(\frac{x}{R}\right)dx = 2R\sinh(1) \cong 2.35R$$

3. Seja

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = x^2, \ 0 < z < 1, \ -2 < x < 2\}.$$

Suponhamos que a densidade de massa de S é dada por $\rho(x,y,z) = \sqrt{1+4x^2}$.

(a) Calcule a massa de S.

Resolução: Por definição a massa de S, que designamos por M(S), é dada por

$$\text{M(S)} = \int\int_S \rho$$

Para calcular este integral, começamos por dar uma parametrização de A (parte de um cilindro parabólico)

$$g(x,z) = (x, x^2, z) \ \ -2 < x < 2, \ 0 < z < 1$$

Assim concluimos que

$$\begin{aligned}\text{M(S)} &= \int_{-2}^{2}\left[\int_0^1 \rho(g(x,z))\left|\left|\frac{\partial g(x,z)}{\partial x} \times \frac{\partial g(x,z)}{\partial z}\right|\right| \ dz\right] dx \\ &= \int_{-2}^{2}\left[\int_0^1 1+4x^2 \ dz\right] dx = \int_{-2}^{2}(1+4x^2)\,dx = 76/3\end{aligned}$$

(b) Obtenha a primeira coordenada do centro de massa de S
Resolução: Por definição

$$\overline{x} = \frac{1}{M(S)} \int\int_S f$$

onde

$$f(x, y, z) = x\rho(x, y, z).$$

Atendendo à alínea (a) falta apenas calcular $\int\int_S f$. Por definição (atenção que já se parametrizou S na alínea anterior)

$$\int\int_S f = \int_{-2}^{2} \left[\int_0^1 f(g(x, z)) \left|\left| \frac{\partial g(x, z)}{\partial x} \times \frac{\partial g(x, z)}{\partial z} \right|\right| \, dz \right] dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[\int_0^1 x(1 + 4x^2) \, dz \right] dx = \int_{-2}^{2} x(1 + 4x^2) \, dx = 0$$

Assim: $\overline{x} = 0$

Bom estudo!