Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 9 de Abril de 2016 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{2x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que g é contínua na origem.

Resolução: Se $(x,y) \neq (0,0)$ tem-se

$$|g(x,y) - g(0,0)| = \left| \frac{x^2y^2}{2x^2+y^4} - 0 \right| \leq \frac{x^2y^2}{2x^2} = \frac{y^2}{2} \longrightarrow 0 \, .$$

(2 val.) (b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ e mostre que g é diferenciável na origem.

Resolução: Como $g(x,0) = g(0,y) = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ conclui-se que no ponto $(0,0)$ se tem $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, e portanto a matriz Jacobiana nesse ponto é $Dg(0,0) = [0 \ \ 0]$. Portanto g é diferenciável na origem porque

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k) - g(0,0) - Dg(0,0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}}{||(h,k)||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^2}{(2h^2+k^4)||(h,k)||} = 0 \, ,$$

uma vez que

$$\left| \frac{h^2k^2}{(2h^2+k^4)||(h,k)||} \right| \leq \frac{h^2||(h,k)||^2}{2h^2||(h,k)||} = \frac{||(h,k)||}{2} \longrightarrow 0 \, .$$

(1 val.) (c) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ nos restantes pontos de $\mathbb{R}^2$ e diga, justificando, se g é de classe C^1.

Resolução: Tem-se, se $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2}{2x^2+y^4} - \frac{4x^3y^2}{(2x^2+y^4)^2} \, .$$

Se $y \neq 0$ obtém-se $\frac{\partial g}{\partial x}(y^2,y) = \frac{2}{9}$ e portanto g não é de classe C^1 porque $\frac{\partial g}{\partial x}$ não é contínua na origem devido a ter-se $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$.

(2 val.) 2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciável no ponto $(0,1)$ com matriz Jacobiana nesse ponto

$$Dg(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sendo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $h(x,y) = g(x^2+y^2, e^{x+2y})$, calcule $\dfrac{\partial h_1}{\partial y}(0,0)$.

Resolução: Pela regra da cadeia tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial y}(0,0) &= \frac{\partial g_1}{\partial x}(x^2+y^2, e^{x+2y})\, \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\Big|_{(x,y)=(0,0)} \\ &\quad + \frac{\partial g_1}{\partial y}(x^2+y^2, e^{x+2y})\, \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+2y})\Big|_{(x,y)=(0,0)} \\ &= 2\frac{\partial g_1}{\partial y}(0,1) = 6\ . \end{aligned}$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $g(x,y) = x^2 + (\cos y)^2$.

Resolução: Temos $Dg(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2\cos y \operatorname{sen} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -\operatorname{sen}(2y) \end{bmatrix}$. Então

$$Dg(x,y) = [0 \ \ 0] \iff \begin{cases} x = 0 \\ \operatorname{sen}(2y) = 0 \end{cases}$$

e os pontos críticos são todos da forma $(x,y) = (0, k\pi/2)$ com $k \in \mathbb{Z}$. A matriz Hessiana é, para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} D^2g(x,y) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2\cos(2y) \end{bmatrix} \\ D^2g(0,k\pi) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{(indefinida)} \\ D^2g(0,\pi/2+k\pi) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(definida positiva)}\ , \end{aligned}$$

pelo que, para cada $k \in Z$, o ponto $(0, k\pi)$ é de sela e o ponto $(0, \pi/2 + k\pi)$ é de mínimo.

4. Considere o conjunto definido por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 1\ ;\ 2x^2 < z < 1 + x\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$ e da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\text{vol}(V) &= \int_0^1 \left(\int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{2x^2}^{1+x} 1\, dz \right) dx \right) dy \\
\text{vol}(V) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sqrt{\frac{z}{2}}}^{\sqrt{\frac{z}{2}}} \left(\int_0^1 1\, dy \right) dx \right) dz + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_{z-1}^{\sqrt{\frac{z}{2}}} \left(\int_0^1 1\, dy \right) dx \right) dz
\end{aligned}$$

(2 val.) b) Sabendo que a função densidade de massa é dada por $g(x, y, z) = 4y$, calcule a massa de V.

Resolução:

$$\text{massa}(V) = \int_0^1 \left(\int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{2x^2}^{1+x} 4y\, dz \right) dx \right) dy = \frac{27}{12}$$

(2 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume do sólido

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < x < 2 - \sqrt{y^2 + z^2}\}.$$

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (x, ρ, θ) tem-se:

$$\begin{cases} x = x \\ y = \rho \cos\theta \\ z = \rho \,\text{sen}\, \theta \end{cases}$$

e o volume é dado por

$$\text{vol}(A) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{\rho^2}^{2-\rho} \rho\, dx \right) d\rho \right) d\theta = \frac{5\pi}{6}.$$

(3 val.) 6. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$$

em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$. Supondo que $u = 0$ na fronteira do disco unitário $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, mostre que $u \leq 0$ em D.

Resolução: Como u é uma função contínua e D é um conjunto compacto sabemos, pelo Teorema de Weierstrass, que a função u tem máximo e mínimo absolutos em D. Os extremos no interior do disco correspondem a pontos de estacionaridade de u, que são classificados usando a matriz Hessiana:

$$D^2u(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

O traço da matriz Hessiana é a soma dos valores próprios e neste caso sabemos, por hipótese que é positivo, portanto pelo menos um dos valores próprios é positivo. Logo não podemos ter um ponto de máximo no interior de D. Donde podemos concluir que o máximo pertence então à fronteira de D. Como $u = 0$ na fronteira de D este é o valor máximo de u, ou seja, $u \leq 0$.