

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - v1 - 11h30 - 06 de junho de 2016

Duração: 1h30m

Resolução abreviada

[3.0] 1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por

$$f(x, y) = \left(x^2 \log(1 + y^2) + 2xy, \cos(x - y - 1) + e^{x+y-1} \right)$$

Prove que f tem uma inversa local de classe C^1 numa vizinhança de $(1, 0)$. Sendo $f^{-1}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ essa inversa, determine $\frac{\partial y}{\partial u}(0, 2)$.

Resolução: $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ visto que é a soma, produto e composta de funções polinomiais com a exponencial, o seno e o logaritmo e tem domínio \mathbb{R}^2 . Tem-se, também, que

$$\det Df(1, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Então, pelo teorema da função inversa existe uma inversa continuamente diferenciável numa vizinhança do ponto $(1, 0)$. Como $f(1, 0) = (0, 2)$ tem-se ainda,

$$Df^{-1}(0, 2) = (Df(1, 0))^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $\frac{\partial y}{\partial u}(0, 2) = \frac{1}{2}$.

2. Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto definido por

$$\begin{cases} x \sin y + z \cos y = 1 \\ x \cos y - z \sin y = 0 \end{cases}$$

[1.5] a) Prove que C é uma variedade diferencial. Qual a sua dimensão?

Resolução: Sendo $G(x, y) = (x \sin y + z \cos y - 1, x \cos y - z \sin y)$, $G \in C^1(\mathbb{R}^3)$ pois ambas as funções coordenadas são produtos, somas e compostas de funções polinomiais, função seno e função cosseno. A característica de

$$DG(x, y) = \begin{bmatrix} \sin y & x \cos y - z \sin y & \cos y \\ \cos y & -x \sin y - z \cos y & -\sin y \end{bmatrix}$$

é 2 em todos os pontos pois o determinante da matriz formada pela primeira e terceira colunas nunca se anula. Logo C é uma variedade de dimensão $3 - 2 = 1$.

[1.5] b) Indique o espaço normal a C no ponto $(0, 0, 1)$.

Resolução: O espaço normal é composto pelas combinações lineares dos vectores $\nabla G_1(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ e $\nabla G_2(0, 0, 1) = (1, -1, 0)$ ou seja o espaço

$$\{(u, -u, w) : u \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}\}$$

[1.0] c) Indique uma parametrização para C .

Resolução: O sistema é linear, possível e determinado em x e z e equivalente a

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} y \\ \operatorname{cos} y \end{bmatrix}.$$

Assim uma parametrização para C será $\gamma(y) = (\operatorname{sen} y, y, \operatorname{cos} y), y \in \mathbb{R}$.

[3.0] 3. Estude, quanto à existência de extremos, a função definida por $f(x, y, z) = y + 2z$ no conjunto $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0 ; x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$.

Resolução: D é uma variedade compacta pois trata-se de uma circunferência e f é uma função contínua. Logo, pelo teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo em D . Como, $\nabla f(x, y, z) = (0, 1, 2)$ e, sendo D definido por $H(x, y, z) = (y + z, x^2 + y^2 + z^2 - 2) = (0, 0)$, $\nabla H_1(x, y, z) = (0, 1, 1)$ e $\nabla H_2(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, usando o método dos multiplicadores de Lagrange obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0 \\ 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0 \\ 2 + \lambda_2 z = 0 \\ x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \\ z = \mp 1 \\ \lambda_1 = -\frac{3}{2} \\ \lambda_2 = \pm \frac{1}{4} \end{cases}$$

Sabendo que f tem máximo e mínimo em D , que os extremantes têm que ser $(0, 1, -1)$ e $(0, -1, 1)$ e que $f(0, 1, -1) = -1$ e $f(0, -1, 1) = 1$, é imediato que $\max_D f = 1$ e $\min_D f = -1$.

[3.0] 4. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 ; z < 1 ; y > 0\}$$

e o campo vetorial $F(x, y, z) = (x^2 - x, -2xy, z)$. Calcule o fluxo de F através de S segundo a normal com terceira componente negativa, usando o teorema da divergência.

Resolução: Aplica-se o teorema da divergência ao domínio

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1 ; y > 0\}$$

e, tendo em conta que $\operatorname{div} F = 0$, obtém-se

$$\iint_S F \cdot n = - \iint_A F \cdot n - \iint_B F \cdot n,$$

em que

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 ; x^2 + y^2 < 1 ; y > 0\}$$

e

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 ; x^2 < z < 1\}.$$

Na superfície A tem-se:

$F(x, y, z) = (x^2 - x, -2xy, 1)$; $n(x, y, z) = (0, 0, 1)$ e, portanto, $F \cdot n = 1$, de onde resulta $\iint_A F \cdot n = \operatorname{vol}_2(A) = \frac{\pi}{2}$.

Na superfície B tem-se:

$$F(x, y, z) = (x^2 - x, 0, z); n(x, y, z) = (0, -1, 0), \text{ ou seja, } \iint_A F \cdot n = 0.$$

$$\text{Assim, concluímos que } \iint_S F \cdot n = -\frac{\pi}{2}.$$

5. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}; z < 1\}$$

e o campo vetorial $F(x, y, z) = (yz - y, x + xz, xy + z)$.

[1.0] a) Indique justificadamente se o campo F é conservativo.

Resolução: Dado que $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 + z$ e $\frac{\partial F_1}{\partial y} = z - 1$, o campo F não é fechado e, portanto, não é conservativo.

[3.0] b) Calcule o fluxo do rotacional de F através de S segundo a normal n com terceira componente negativa, usando o teorema de Stokes.

Resolução: O bordo da superfície S é a linha descrita pelo caminho

$$g(t) = (\cos t, -\sin t, 1); 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Aplicando o teorema de Stokes obtém-se

$$\iint_S \text{rot } F \cdot n = \int_{\partial S} F \cdot dg = \int_0^{2\pi} F(g(t)) \cdot g'(t) dt = -2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = -2\pi.$$

[3.0] 6. Seja $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ um campo vetorial cuja divergência é constante, $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície limitada cujo espaço normal é o mesmo em todos os pontos e u um vector não nulo desse espaço normal. Considere ainda as superfícies $S_t = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = a + tu; a \in S\}$, em que $t \in [0, 1]$.

Prove que se o campo f pertence ao espaço normal a S_t em todos os seus pontos, para todo $t \in [0, 1]$, então

$$\int \int_{S_1} f \cdot n dS - \int \int_S f \cdot n dS = \int \int_S (\text{div } f) \|u\| dS$$

em que as normais, em S e em S_1 , têm o mesmo sentido de u .

Resolução: Como o espaço tangente a S é o mesmo em todos os pontos, S é uma superfície plana. Considere-se então o sólido regular D de bases S e S_1 . Por aplicação do teorema da divergência a f em D ,

$$\int \int \int_D \text{div } f dx dy dz = \int \int_{S \cup S_1 \cup S_2} f \cdot n_{ext} dS$$

em que S_2 é a superfície lateral do sólido. Dado que o campo é paralelo à superfície lateral do sólido em todos os pontos o fluxo de f é nulo através de S_2 resultando

$$\int \int \int_D \text{div } f dx dy dz = \int \int_{S \cup S_1} f \cdot n_{ext} dS$$

Basta, agora, orientar as superfícies com normais com mesmo sentido de u , o que faz com que a normal em S seja interior e a normal em S_1 seja exterior, e notar que, sendo $\text{div } f$ constante, o integral do primeiro membro é igual ao produto de $\text{div } f$ pelo volume do sólido e que o volume de um sólido regular é o produto da área da base (dada por $\int \int_S dS$) pela altura (dada por $\|u\|$) e obtém-se o resultado pretendido.