Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - versão 1 - 05 de Janeiro de 2015 - 14h

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

Resolução abreviada

1. Seja E o elipsóide definido pela equação $x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2 = 4$.

[1.0] (a) Determine um vector normal a E no ponto $(0, 0, 2)$.

Resolução: Considerando $F(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2 - 4$, sabemos que um vector
[1.0] normal a E no ponto $(0, 0, 2)$ é o vector $\nabla F(0, 0, 2) = (0, 0, 4)$.

[1.0] (b) Determine o plano tangente a E no ponto $(0, 0, 2)$.

Resolução: $[(x, y, z) - (0, 0, 2)] \cdot (0, 0, 4) = 0 \iff z = 2$.

[2.0] 2. Determine os extremos de $f(x, y) = y$ na elipse $x^2 + 2xy + 2y^2 = 4$.

Resolução: Seja E a elipse. Pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange, se um ponto (x, y) é extremo de $f\lfloor E$ então, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 = 4 \\ 0 = \lambda(2x + 2y) \\ 1 = \lambda(2x + 4y) \end{cases}$$

É fácil ver que este sistema tem duas soluções: $(2, -2)$ e $(-2, 2)$. Por outro lado, pelo teoremade Weierstrass, dado que f é contínua e E é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, sabemos que existem pontos de máximo/mínimo absolutos de f em E. Concluimos então que estes dois pontos são extremos de $f\lfloor E$ (sendo o primeiro mínimo e o outro máximo).

3. Sejam $u(x, y) = e^{xy} + x^2 + y$ e $v(x, y) = 3x + y$, funções definidas em $\mathbb{R}^2$.

[2.0] (a) Mostre que existe uma vizinhança de $(x, y) = (0, 0)$ onde a equação $u(x, y) = 1$ define y como uma função C^1 de x. Calcule $y^{'}(0)$.

Resolução: Aplicamos o teorema da função implícita a $G(x, y) = e^{xy} + x^2 + y - 1$. Temos que G é uma função C^1, $G(0, 0) = 0$ e além disso $\frac{\partial G}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Deste teorema segue-se então o que se pretendia provar. Assim, numa vizinhança de $(0, 0)$ sabemos que

$$e^{xy(x)} + x^2 + y(x) - 1 = 0$$

de onde, derivando em ordem a x e substituindo em $x = 0$ vem que $y'(0) = 0$.

[1.5] (b) Mostre que $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ é localmente invertível numa vizinhança de $(x, y) = (0, 0)$ e calcule $DF^{-1}(1, 0)$.

Resolução: Aplicamos o teorema da função inversa à função F. Temos claramente que F é uma função C^1 e que $\det DF(0, 0) \neq 0$. Concluimos que F é então localmente invertível numa vizinhança de $(x, y) = (0, 0)$. Por outro lado

$$DF^{-1}(1, 0) = [DF(0, 0)]^{-}1 = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[1.5] (c) Calcule $\int_C v\,ds$ onde C é o segmento de recta representado pelo caminho

$$g(t) = (t, t+10),\ \ t \in [0,1].$$

Resolução: Por definição
$$\int_C v\,ds = \int_0^1 v(g(t))\,||g'(t)||\,dt = 12\sqrt{2}.$$

4. Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x,y) = (y, 1-x)$.

[1.0] (a) Calcule o trabalho realizado por F ao longo do segmento de recta entre o ponto $(-1,0)$ e o ponto $(1,0)$.

Resolução:
Ao longo do segmento de recta tem-se $y = 0$ e $F(x,0) = (0, 1-x)$. Assim, o campo F é perpendicular ao segmento de recta e, portanto, o trabalho é nulo.

[2.0] (b) Use o teorema de Green para calcular o trabalho realizado por F ao longo da linha definida por $x^2 + y^2 = 1,\ y > 0$ no sentido horário.

Resolução:
Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$. Note-se que ∂D é a união do segmento de recta descrito na alínea anterior com a linha L definida por $x^2 + y^2 = 1,\ y > 0$. Pelo teorema de Green e tendo em conta o resultado da alínea anterior, tem-se

$$\int_L F = 2 \iint_D dxdy = 2\,\mathrm{vol}_2(D) = \pi.$$

5. Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x,y,z) = (1-x, 2y, -z)$.

[1.0] (a) Calcule o fluxo do campo F através da superfície plana definida por $z = 0,\ x^2+y^2 < 4$, no sentido da normal com terceira componente negativa.

Resolução:
Seja P a superfície plana. Sendo $F(x,y,0) = (1-x, 2y, 0)$ e a normal unitária dada por $n(x,y,0) = (0,0,-1)$, tem-se $\iint_P F \cdot n = 0$.

[2.0] (b) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo F através da superfície S definida por $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2},\ \ 0 < z < 1$, no sentido da normal com terceira componente positiva.

Resolução:
Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 2 - \sqrt{x^2+y^2},\ \ 0 < z < 1\}$ e $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ z = 1\}$. É claro que $\partial V = S \cup T \cup P$, sendo P o plano descrito na alínea anterior. Pelo teorema da divergência,

$$0 = \iint_S F \cdot n + \iint_T F \cdot n + \iint_P F \cdot n$$

e tendo em conta o resultado da alínea anterior, tem-se

$$\iint_S F \cdot n = -\iint_T F \cdot n = \mathrm{vol}_2(T) = \pi.$$

[2.0] 6. Use o teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional do campo vectorial $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $H(x, y, z) = (y, -x, z^3)$, através da superfície dada por $z = 1 - x^2 - y^2,\ z > 0$, orientada com a normal com terceira componente positiva.

Resolução:

Seja S a superfície dada. O respectivo bordo pode ser descrito pela função $g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. pelo teorema de Stokes, tem-se

$$\iint_S \operatorname{rot} H \cdot n = \oint_{\partial S} H \cdot dg = \int_0^{2\pi} H(g(t)) \cdot g'(t) dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

[3.0] 7. Seja F um campo vectorial fechado e definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$. Seja C a circunferência dada por $z = 0,\ x^2 + y^2 = 1$ e descrita uma vez no sentido horário quando vista do ponto $(0, 0, 10)$. Sabendo que $\oint_C F \cdot dg = 1$, calcule os valores possíveis do integral $\oint_L F \cdot dg$ em que L designa uma linha regular, simples e fechada sobre a superfície cilíndrica descrita pela equação $x^2 + y^2 = 1$.

Resolução:

A linha L só pode ser de um de dois tipos. Ou efectua uma volta completa em torno do eixo Oz ou não. Dado que o campo é fechado, por homotopia ou pelo teorema de Stokes, os valores possíveis são: $-1, 0, 1$.