

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto LMAC, MEBiom, MEFT
Teste 2 - 09 de Junho de 2014 - **09h00 (versão 1)**

Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

1. Considere o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - xy + y^2 + z^2 = 2\}$.

[2 v] (a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

Resolução: M é um conjunto de nível da função $F(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 + z^2$, de classe C^1 . A matriz $DF(x, y, z) = [2x - y, -x + 2y, 2z]$ tem característica igual a 1 em todos os pontos de M , porque o único ponto onde a característica é igual a 0 é $(x, y, z) = (0, 0, 0) \notin M$. Logo M é uma variedade. A dimensão de M é $3 - \text{car}DF = 3 - 1 = 2$.

[2,5 v] (b) Obtenha uma base do espaço tangente a M no ponto $(-1, -1, 1)$.

Resolução: O vector linha $DF(-1, -1, 1) = [-1, -1, 2]$ constitui uma base do espaço normal a M nesse ponto. Portanto, resolvendo a equação linear $-x - y + 2z = 0$, obtém-se uma base do espaço tangente: $\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$.

[2 v] (c) Admitindo que a função f dada por $f(x, y, z) = x + y$ tem valor máximo em M , calcule esse valor através do método dos multiplicadores de Lagrange.

Resolução: Os pontos de extremo de f em M pertencem ao conjunto de soluções, para (x, y, z) , do sistema de equações:

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x - y) \\ 1 = \lambda(2y - x) \\ 0 = \lambda(2z) \\ x^2 - xy + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}$ uma incógnita adicional. Da terceira equação deduz-se que $z = 0$, sendo $\lambda = 0$ incompatível com a primeira equação. As primeiras duas equações implicam $2x - y = 2y - x$, ou seja $x = y$. Da quarta equação tem-se então $x^2 = 2$. As duas soluções para (x, y, z) são portanto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$, ou seja o valor máximo de f em M é $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = 2\sqrt{2}$.

[2 v] 2. Seja f a função dada pela expressão

$$f(x, y) = \left(\frac{4}{xy + 1}, e^{x^2 - y^2} \right).$$

Justifique que f não é injectiva no seu domínio. Mostre que, restrita a uma vizinhança do ponto $(1, 1)$, f tem inversa local g de classe C^1 , e calcule $Dg(2, 1)$.

Resolução: f não é injectiva, pois $f(1, 1) = (2, 1) = f(-1, -1)$. A Jacobiana de f :

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{-4y}{(xy+1)^2} & \frac{-4x}{(xy+1)^2} \\ 2xe^{x^2-y^2} & -2ye^{x^2-y^2} \end{bmatrix}$$

tem entradas contínuas, portanto $f \in C^1$. Tem-se ainda:

$$\det Df(1, 1) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Assim, pelo teorema da função inversa, restrita a uma vizinhança do ponto $(1, 1)$, f tem inversa local g de classe C^1 . O teorema implica ainda:

$$Dg(2, 1) = [Df(1, 1)]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 \\ -1/2 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

3. Considere o campo vectorial definido por $H(x, y, z) = (y^2, 2xy + z^2, 2yz)$.

[1,5 v]

(a) Calcule um potencial escalar para o campo H .

Resolução: Resolvendo $\nabla\varphi = H$ obtém-se que $\varphi(x, y, z) = xy^2 + yz^2$ é um potencial escalar de classe C^1 para H .

[1 v]

(b) Calcule o trabalho de H ao longo do caminho

$$\gamma(t) = (\sin(1 - t^2), t \cos(1 - t^2), 1 + t), \text{ com } t \in [-1, 1].$$

Resolução: Pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha e usando a alínea anterior:

$$\int_C H \cdot d\gamma = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(-1)) = \varphi(0, 1, 2) - \varphi(0, -1, 0) = 4.$$

4. Seja

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x^2 + 2y^2, z < 2\},$$

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 2\},$$

e considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = (y - x, -x, z).$$

[2 v]

(a) Calcule o trabalho de F ao longo de L , no sentido horário visto do ponto $(0, 0, 10)$.

Resolução: Usando a definição de trabalho, como $g(t) = (\cos(t), \sin(t), 2)$, com $t \in]0, 2\pi[$, é uma parametrização de L no sentido contrário ao pedido, obtém-se

$$W = - \int_0^{2\pi} F(g(t)) \cdot g'(t) dt = - \int_0^{2\pi} (-1 + \sin(t) \cos(t)) dt = 2\pi.$$

- [2 v] (b) Calcule o fluxo de F através de M no sentido da normal unitária com terceira componente negativa, usando o Teorema da Divergência.

Resolução: Seja $T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 2\}$ e seja D o sólido limitado pelas superfícies M e T . Seja ainda $n_T = (0, 0, 1)$ e n_M a normal a M dada no enunciado. Aplicando o teorema da divergência, como $\partial D = M \cup T$, fica

$$\iiint_D \operatorname{div}(F) = \iint_M F \cdot n_M + \iint_T F \cdot n_T \Leftrightarrow \iint_M F \cdot n_M = - \iint_T F \cdot n_T,$$

pois $\operatorname{div}F = 0$ e as normais n_T e n_M são exteriores, portanto,

$$\iint_M F \cdot n_M = - \iint_T F \cdot (0, 0, 1) = - \iint_T 2 = -2\text{Área}(T) = -2\pi.$$

- [2 v] (c) Mostre que $F = \operatorname{rot}(A)$, com $A(x, y, z) = (-xz, xz, \frac{1}{2}y^2)$, e determine o trabalho de A ao longo de L no sentido anti-horário visto do ponto $(0, 0, 10)$.

Resolução: Aplicando a definição de rotacional ao campo A fica

$$\operatorname{rot}(A) = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) = (y - x, -x, z).$$

Uma vez que L é o bordo de M , aplicamos o teorema de Stokes à superfície M e usamos o resultado do fluxo obtido em (b). A normal unitária a M compatível com o sentido de L dado é n_M , já usada em (b), logo

$$\int_L A \cdot dg = \iint_M \operatorname{rot}(A) \cdot n_M = \iint_M F \cdot n_M = -2\pi.$$

- [3 v] 5. Seja $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , definida num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Seja $a \in D$ tal que $F(a) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a) \neq 0$. Nestas condições, o teorema da função implícita implica que o conjunto dado por $F(x) = 0$ é o gráfico de uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, onde $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$, com f de classe C^1 , numa vizinhança do ponto a . Mostre que, sendo F de classe C^2 , então f é de classe C^2 . Obtenha uma expressão para a entrada ij da matriz Hessiana de f no ponto $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ em termos das derivadas de F no ponto a .

Resolução: Pelo teorema da função implícita, as derivadas de f de primeira ordem, $\partial f / \partial x_i$, $i = 1, \dots, n-1$, são dadas em S por:

$$(*) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))}.$$

As funções $\partial F / \partial x_i$, com $i = 1, \dots, n$, pertencem à classe C^1 , uma vez que $F \in C^2$. Portanto $f \in C^2$, porque as funções $\partial f / \partial x_i$, com $i = 1, \dots, n-1$, são de classe C^1 , sendo obtidas das derivadas $\partial F / \partial x_i$ e $f \in C^1$, através de operações lineares, multiplicação, divisão e composição.

Derivando a equação (*) em ordem x_j , usando o teorema da função composta, e substituindo (*), obtém-se a expressão pedida para $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a_1, \dots, a_{n-1})$, substituindo o ponto $a = (a_1, \dots, a_{n-1}, f(a_1, \dots, a_{n-1}))$ no segundo membro da equação:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{- \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_n} \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^3}.$$