Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto LMAC, MEBiom, MEFT
Teste 2 - 09 de Junho de 2014 - **09h00 (versão 1)**
Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

1. Considere o conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + xy + y^2 + z^2 = 4\}$.

[2 v] (a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

Resolução: M é um conjunto de nível da função $F(x,y,z) = x^2+xy+y^2+z^2$, de classe C^1. A matriz $DF(x,y,z) = [2x+y\ ,\ x+2y\ ,\ 2z]$ tem característica igual a 1 em todos os pontos de M, porque o único ponto onde a característica é igual a 0 é $(x,y,z) = (0,0,0) \notin M$. Logo M é uma variedade. A dimensão de M é $3 - \mathrm{car}DF = 3 - 1 = 2$.

[2,5 v] (b) Obtenha uma base do espaço tangente a M no ponto $(-1,-1,1)$.

Resolução: O vector linha $DF(-1,-1,1) = [-3,-3,2]$ constituí uma base do espaço normal a M nesse ponto. Portanto, resolvendo a equação linear $-3x - 3y + 2z = 0$, obtém-se uma base do espaço tangente: $\{(-1,1,0),(2,0,3)\}$.

[2 v] (c) Admitindo que a função f dada por $f(x,y,z) = x - y$ tem valor máximo em M, calcule esse valor através do método dos multiplicadores de Lagrange.

Resolução: Os pontos de extremo de f em M pertencem ao conjunto de soluções, para (x,y,z), do sistema de equações:

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x+y) \\ -1 = \lambda(2y+x) \\ 0 = \lambda(2z) \\ x^2+xy+y^2+z^2 = 4 \end{cases}$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}$ uma incógnita adicional. Da terceira equação deduz-se que $z = 0$, sendo $\lambda = 0$ incompatível com a primeira equação. As primeiras duas equações implicam $2x+y = -(2y+x)$, ou seja $x = -y$. Da quarta equação tem-se então $x^2 = 4$. As duas soluções para (x,y,z) são portanto $(2,-2,0)$ e $(-2,2,0)$, ou seja o valor máximo de f em M é $f(2,-2,0) = 4$.

[2 v] 2. Mostre que o sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{xy+1} - z &= 1 \\ e^{y^2-z^2} &= 1 \end{cases}$$

determina y e z em função de x, $(y,z) = f(x)$, com $f \in C^1$, numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$. Calcule $Df(1)$.

Resolução: O sistema corresponde à equação $F(x,y,z)=(0,0)$, onde $F(x,y,z)=(\frac{4}{xy+1}-z-1, e^{y^2-z^2}-1)$, com matriz derivada no ponto $(1,1,1)$:

$$DF(1,1,1)=\begin{bmatrix} \frac{-4y}{(xy+1)^2} & \frac{-4x}{(xy+1)^2} & -1 \\ & & \\ 0 & 2ye^{y^2-z^2} & -2ze^{y^2-z^2} \end{bmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ & & \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tem-se: 1) $F\in C^1$, pois as entradas de $DF(x,y,z)$ são contínuas; 2) $F(1,1,1)=(0,0)$; 3) $\det DF_{yz}(1,1,1)=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=4\neq 0$. Assim, pelo teorema da função implícita, o sistema determina y e z em função de x, $(y,z)=f(x)$, com $f\in C^1$, numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$. O teorema implica ainda:

$$Df(1)=-\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

3. Considere o campo vectorial definido por $H(x,y,z)=(2xe^y+z^2, x^2e^y, 2xz)$.

[1,5 v] (a) Calcule um potencial escalar para o campo H.

Resolução: Resolvendo $\nabla\varphi=H$ obtém-se que $\varphi(x,y,z)=x^2e^y+xz^2$ é um potencial escalar de classe C^1 para H.

[1 v] (b) Calcule o trabalho de H ao longo do caminho $\gamma(t)=((t+1)e^t, t^2-1, te^{t^2-1})$, com $t\in[-1,1]$.

Resolução: Pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha e usando a alínea anterior:

$$\int_C H\cdot d\gamma=\varphi(\gamma(1))-\varphi(\gamma(-1))=\varphi(2e,0,1)-\varphi(0,0,-1)=4e^2+2e\ .$$

4. Seja

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2=z^2\ ,\ 1<z<2\}\ ,$$
$$L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2=4\ ,\ z=2\}$$

e considere o campo vectorial $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x,y,z)=(x+y(z-1), y-x(z-1), -2z)\ .$$

[2 v] (a) Usando o Teorema da Divergência, calcule o fluxo de F através de S no sentido da normal unitária n com terceira componente negativa.

Resolução: Sejam $T_1=\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2\leq 1\ ,\ z=1)\}$, $T_2=\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2\leq 4\ ,\ z=2)\}$ e D o sólido limitado pelas superfícies S, T_1 e T_2. Sejam ainda $n_{T_1}=(0,0,-1)$, $n_{T_2}=(0,0,1)$ e n_S a normal a S dada no enunciado. Aplicando o teorema da divergência, como $\partial D=S\cup T_1\cup T_2$, fica

$$\iiint_D \operatorname{div}(F)=\iint_S F\cdot n_S+\iint_{T_1}F\cdot n_{T_1}+\iint_{T_2}F\cdot n_{T_2}$$

pois as normais n_{T_1}, n_{T_2} e n_S são exteriores. Como $\text{div}F = 0$, a igualdade anterior é equivalente a

$$\begin{aligned}\iint_S F \cdot n_S &= -\iint_{T_1} F \cdot (0,0,-1) - \iint_{T_2} F \cdot (0,0,1)\\ &= -\iint_{T_1} 2 - \iint_{T_2} (-4) = -2\text{Área}(T_1) + 4\text{Área}(T_2) = 14\pi\ .\end{aligned}$$

[2 v] (b) Calcule o trabalho de F ao longo de L percorrido uma vez no sentido anti-horário quando visto de $(0,0,10)$, usando a definição.

Resolução: Usando a definição de trabalho, como $g(t) = (2\cos(t), 2\,\text{sen}(t), 2)$, com $t \in]0, 2\pi[$, é uma parametrização de L no sentido pedido, obtém-se

$$\int_L F \cdot dg = \int_0^{2\pi} F(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int_0^{2\pi} (-4)dt = -8\pi\ .$$

[2 v] (c) Calcule o fluxo de $\text{rot}(F)$ através de S no sentido da normal unitária n com terceira componente positiva.

Resolução: Seja $C = \{(x,y,z)\ :\ x^2 + y^2 = 1\ ,\ z = 1\}$. Como o bordo de S é $L \cup C$, aplicando o teorema de Stokes a S, com os sentidos determinados pela regra da mão direita, fica

$$\iint_S \text{rot}(F) \cdot n = -\int_L F \cdot dg + \int_C F \cdot dg\ ,$$

onde C e L são percorridos no sentido anti-horário quando vistos de $(0,0,10)$. O trabalho ao longo de L foi calculado em (b). Para o trabalho ao longo de C usamos a parametrização $g(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), 1)$, com $t \in]0, 2\pi[$, que percorre C no sentido anti-horário quando visto de cima, e obtemos $\int_C F \cdot dg = 0$, donde $\iint_S \text{rot}(F) \cdot n = 8\pi$.

[3 v] 5. Seja $f : D \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1, definida num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, com matriz derivada

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \alpha(x,y) & \beta(x,y) \\ \gamma(x,y) & \delta(x,y) \end{bmatrix}.$$

Seja $(a,b) \in D$ tal que $\det Df(a,b) \neq 0$. Nestas condições, o teorema da função inversa implica que f admite uma inversa $g(u,v)$ de classe C^1, numa vizinhança do ponto $(u,v) = (c,d) = f(a,b)$. Mostre que, sendo f de classe C^2, então g é de classe C^2. Supondo que $\det Df(x,y) = 1$ (constante), obtenha uma expressão para $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ no ponto (c,d), em termos dos valores das funções α, β, γ, δ e das suas derivadas no ponto (a,b).

Resolução: Pelo teorema da função inversa, nessa vizinhança a matriz Jacobiana de g é dada por:

$$Dg(u,v) = [Df(g(u,v))]^{-1} = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)(g(u,v))} \begin{bmatrix} \delta(g(u,v)) & -\beta(g(u,v)) \\ -\gamma(g(u,v)) & \alpha(g(u,v)) \end{bmatrix}.$$

As funções α, β, γ, δ pertencem à classe C^1, uma vez que $f \in C^2$. Portanto $g \in C^2$, porque as entradas de $Dg(u,v)$ são de classe C^1, sendo obtidas de α, β, γ, δ e $g \in C^1$, através de operações lineares, multiplicação, divisão e composição.

Com a condição adicional $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ (constante), tem-se:

$$(*) \qquad \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) = \delta(g(u,v)), \qquad \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) = -\gamma(g(u,v))\,.$$

Derivando a primeira equação em ordem u, no ponto $(u,v) = (c,d)$, usando o teorema da função composta e $(*)$, obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(c,d) &= \frac{\partial \delta}{\partial x}(g(c,d))\frac{\partial x}{\partial u}(c,d) + \frac{\partial \delta}{\partial y}(g(c,d))\frac{\partial y}{\partial u}(c,d) \\ &= \frac{\partial \delta}{\partial x}(a,b)\delta(a,b) - \frac{\partial \delta}{\partial y}(a,b)\gamma(a,b)\,. \end{aligned}$$