Exercícios extra propostos (em actualização ao longo do curso...)

Grau de dificuldade: $*$ muito fácil; $**$ fácil, etc.

1. ($*$) **(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** Dados $x, y \in \mathbb{R}^N$ prove que

$$|x \cdot y| \leq ||x||\,||y||$$

[Sugestão: Observe que $||x + \alpha y||^2 \geq 0$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$]

2. ($*$) Prove que um conjunto $D \subset \mathbb{R}^N$ é fechado se e somente se $\partial D \subset D$.

3. ($*$) Prove que a união e a intersecção de um número finito de conjuntos abertos (ou fechados) é um conjunto aberto (ou fechado, respectivamente).

4. ($*$) Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua num ponto $p \in D$. Supondo que $f(p) > 0$ prove que existe $B(p)$, tal que para todo o $x \in B(p) \cap D$, se tem $f(x) > 0$.

5. ($*$) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x, y) > 0\}$$

é aberto, e que o conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x, y) \geq 0\}$$

é fechado.[1]

6. ($*$) **(Propriedades da derivada segundo um vector)** Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, A aberto. Suponhamos que existem (finitas) $D_v f(p)$ e $D_v g(p)$ para um dado $v \in \mathbb{R}^N$. Prove que

   (a) $D_v(f + g)(p) = D_v f(p) + D_v g(p)$

   (b) $D_v(fg)(p) = D_v f(p)g(p) + f(p)D_v g(p)$

   (c) Se g não se anular numa vizinhança de p então

$$D_v(f/g)(p) = \frac{D_v f(p)g(p) - D_v g(p)f(p)}{[g(p)]^2}$$

   (d) $D_{cv}(f)(p) = cD_v(f)(p)$, $c \in \mathbb{R}$

7. ($***$) Dê um exemplo que mostre como em geral $D_{v_1+v_2}f(p) \neq D_{v_1}f(p) + D_{v_2}f(p)$.

8. ($**$) Prove o Teorema de Lagrange (f: campo escalar). [Sugestão: dada na aula.]

[1] Análogo com < 0 e $\leq$.

9. $(***)$ Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função tal que as suas derivadas parcias de primeira ordem são limitadas numa vizinhança de um ponto $p \in \mathbb{R}^N$. Prove que f é contínua em p.

10. $(**)$ Seja $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $p = (p_1, ..., p_k)$. Suponhamos que $Dg(p) = (a_1, ..., a_k)$, $a_i \in \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $N \geq k$ definida por
$$f(x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_k).$$
Prove que f é diferenciável em todos os pontos x da forma $(p_1, ..., p_k, x_{k+1}, ..., x_n)$ e que
$$Df(x) = (a_1, ..., a_k, 0, ..., 0).$$

11. $(**)$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$. Prove que a existência da matriz Jacobiana de f num ponto $p \in \mathbb{R}$ é uma condição necessária e suficiente para a diferenciabilidade de f em p.

12. $(**)$ Dado um conjunto de n pontos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,n}$ define-se o seu baricentro como o ponto $P = (\tilde{x}, \tilde{y})$ onde
$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \tilde{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$
Verifique que P é o único ponto crítico da função (soma dos quadrados da distância a estes n pontos)
$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n}[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]$$
e que f alcança o seu valor mínimo em P.

13. $(**)$ Considere a equação
$$x^2 + y^2 + z^2 = \psi(x + y + z)$$
onde $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ é tal que $\psi(0) = 0$ e $\psi'(0) = 1$. Prove que numa vizinhança de $(0, 0, 0)$ esta equação define z como função implícita diferenciável de x e y. Calcule $\nabla z(0, 0)$.

14. $(**)$ Considere o sistema
$$(S) \quad \begin{cases} xz^3 + y^2u^3 = 1 \\ 2xy^3 + u^2z = 0 \end{cases}$$

    a) Veja que (S) define x e y como funções implícitas diferenciáveis de z e u, numa vizinhança do ponto $p = (x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 1, 0, 1)$

b) Sejam $x = h(z,u)$, $y = g(z,u)$ as funções implícitas cuja existência se provou em a). Considere a função

$$G(z,u) = (h(z,u), g(z,u))$$

Prove que G admite função inversa numa vizinhança do ponto $(0,1)$.

15. $(***)$ Prove o Teorema dos multiplicadores de Lagrange. [Sugestão: use o facto de

$$T_pM = \{v : \ \exists \ \sigma : I \subset \mathbb{R} \to M, \ \sigma \in C^1(I), \ t_0 \in I \text{ tal que } p = \sigma(t_0), \ v = \sigma'(t_0)\}]$$

16. $(**)$ Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(0,0) \neq 0$, e considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$$

Seja $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ um ponto onde a distância de S à origem é mínima. Prove que a normal a S no ponto P é pararela ao vector OP.

17. $(**)$ Prove por definição que um campo de forças em $\mathbb{R}^n$ constante é conservativo.

18. $(***)$ Sejam o campo

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x - \alpha y}{x^2+y^2}, \frac{\alpha x + y}{x^2+y^2}, z\right), \ \alpha \neq 0$$

e a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1 + z^2\}.$$

Determine os valores possíveis do trabalho $\int_C F \cdot dg$, sendo C uma linha fechada, contida em S e percorrida uma só vez.

19. $(**)$ Prove o Teorema de Green numa região y-simples de $\mathbb{R}^2$ supondo que o campo F é da forma $F = (P, 0)$.

20. $(**)$ Prove o Teorema de Green numa região x-simples de $\mathbb{R}^2$ supondo que o campo F é da forma $F = (0, Q)$.

21. $(***)$ Prove o Teorema de Green numa região simples de $\mathbb{R}^2$. [Sugestão: Use os dois exercícios anteriores]

22. $(**)$ [Teorema da Divergência em $\mathbb{R}^2$] Seja D uma região em $\mathbb{R}^2$ onde o Teorema de Green se possa aplicar e $F = (P, Q)$ um campo vectorial de classe um em $\mathbb{R}^2$. Prove que

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu \, ds = \int\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

onde ν designa a normal unitária exterior à ∂D em relação a D.

23. $(**)$ Seja D uma região em $\mathbb{R}^2$ onde o Teorema de Green se possa aplicar. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to R^2$, de classe dois, tal que

$$\triangle f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } D.$$

Prove que o trabalho do campo vectorial $F(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ é nulo na fronteira de D.[2]

24. $(**)$ Prove o Teorema da Divergência na região $R =]0, 1[\times]0, 1[\times]0, 1[$. [Sugestão: Considere primeiro os casos em que F tem apenas uma componente não nula.]

25. $(*)$ Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe dois. Mostre que

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \triangle f.$$

26. $(**)$ Seja R uma região em $\mathbb{R}^3$ onde o Teorema da Divergência se possa aplicar. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe dois, tal que $\overline{R} \subset D$. Prove que

$$\int\int_{\partial R} \nabla f \cdot \nu \, dS = 0$$

se f é harmónica em R, onde ν designa a normal unitária exterior à ∂R em relação a R. [Sugestão: Use o exercício anterior]

27. $(**)$ Prove o Teorema de Stokes no caso em que

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 3, \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1\}$$

(considere a orientação ν tal que $\nu_z > 0$). [Sugestão: Considere primeiro os casos em que F tem apenas uma componente não nula.]

28. $(**)$ Use o Teorema de Stokes para provar o Teorema de Green numa região simples em $\mathbb{R}^2$.

29. $(**)$ Sejam f, g dois campos escalares ($f \in C^1$, $g \in C^2$) definidos num aberto de $\mathbb{R}^3$. Determine se algum destes campos

    a) $\nabla(fg)$
    b) $f\nabla g$
    c) $g\nabla f$

    é potencial vectorial de $\nabla f \times \nabla g$.

[2] Uma função f com a propriedade anterior diz-se harmónica em D. Em geral, se f é um campo escalar em $\mathbb{R}^n$ define-se $\triangle f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

30. $(***)$ Seja M uma variedade-2 em $\mathbb{R}^3$ onde se possa aplicar o Teorema de Stokes. Seja C o bordo de M orientado de forma positiva em relação à orientação ν de M. Sejam f, g dois campos escalares de classe um definidos num aberto, R, de $\mathbb{R}^3$ tal que $\overline{M} \subset R$. Prove que

$$\int\int_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \nu \, dS = \int_C f \nabla g \, ds.$$

[Sugestão: Use exercício anterior]

31. $(**)$ Sejam $f(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^2$ e $g(x, y, z) = x + y + z$ calcule

$$\int\int_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \nu \, dS$$

onde S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, e ν é a normal unitária a S com terceira componente negativa.