Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exercícios complementares aos da Ficha 3

Margarida Baía

1. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{-y^3}{3x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Calcule as derivadas parciais de f na origem.

   (b) Estude a diferenciablidade de f na origem.

   (c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$

2. Seja $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\mathrm{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Calcule, caso exista, a derivada de f na origem.

   (b) Diga, justificadamente, se a função é de classe C^1.

3. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $g(x,y,z) = (\cos yz, xyz, \frac{1}{z})$ se $z \neq 0$, e $g(x,y,0) = (1,0,0)$. Calcule a derivada de g na origem, caso esta derivada exista.

4. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Indique o conjunto dos pontos onde f é diferenciável, e calcule a derivada nesses pontos.

   (b) Calcule $D_v f(0,0)$ para qualquer vector $v = (\alpha, \beta)$.

   (c) Calcule $D_v f(1,1)$ para qualquer vector $v = (\alpha, \beta)$.

5. Seja $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$.

   (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

   (b) Calcule $D_v f(0,0)$ onde $v = (\cos\theta, \mathrm{sen}\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

   (c) Diga, justificadamente, se f é diferenciável na origem.

6. Dada $f(x,y,z) = (x^2 - y, xy + z + e^x)$ e $v = (1,1,1)$, calcule $D_v f(2,0,1)$.

7. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $D_v\phi(0,0) = 1$ e $D_w\phi(0,0) = 3$, sendo $v = (1,2)$ e $w = (0,1)$. Determine a matriz Jacobiana $D\phi(0,0)$.

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável na origem e tal que

$$f(t,t) = t^3 + t, \;\; f(t,-2t) = 2t.$$

Calcule $D_v f(0,0)$ onde $v = (1,3)$.

9. Poderá existir uma função f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + 4y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x - y$?

10. **(Propriedades da derivada segundo um vector)** Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, A aberto. Suponhamos que existem (finitas) $D_v f(p)$ e $D_v g(p)$ para um dado $v \in \mathbb{R}^N$. Prove que

    (a) $D_v(f+g)(p) = D_v f(p) + D_v g(p)$

    (b) $D_v(fg)(p) = D_v f(p) g(p) + f(p) D_v g(p)$

    (c) Se g não se anular numa vizinhança de p então

    $$D_v(f/g)(p) = \frac{D_v f(p) g(p) - D_v g(p) f(p)}{[g(p)]^2}$$

    (d) $D_{cv}(f)(p) = c D_v(f)(p)$, $c \in \mathbb{R}$

11. Dê um exemplo que mostre como em geral $D_{v_1+v_2} f(p) \neq D_{v_1} f(p) + D_{v_2} f(p)$.

12. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função tal que as suas derivadas parcias de primeira ordem são limitadas numa vizinhança de um ponto $p \in \mathbb{R}^N$. Prove que f é contínua em p. [Sugestão: Use o Teorema de Lagrange de CDI-II convenientemente.]

13. Seja $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $p = (p_1, ..., p_k)$. Suponhamos que $Dg(p) = (a_1, ..., a_k)$, $a_i \in \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $N \geq k$ definida por

    $$f(x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_k).$$

    Prove que f é diferenciável em todos os pontos x da forma $(p_1, ..., p_k, x_{k+1}, ..., x_N)$ e que

    $$\nabla f(x) = (a_1, ..., a_k, 0, ..., 0).$$