Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exercícios complementares aos da Ficha 2

Margarida Baía

1. Prove que um conjunto $D \subset \mathbb{R}^N$ é fechado se e somente se $\partial D \subset D$.

2. Prove que a união e a intersecção de um número finito de conjuntos abertos (ou fechados) é um conjunto aberto (ou fechado, respectivamente).

3. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua num ponto $p \in D$. Supondo que $f(p) > 0$ prove que existe $B(p)$, tal que para todo o $x \in B(p) \cap D$, se tem $f(x) > 0$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que o conjunto
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x, y) > 0\}$$
é aberto, e que o conjunto
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x, y) \geq 0\}$$
é fechado.

5. Indique, justificadamente, se o domínio das seguintes funções é um conjunto aberto, fechado, limitado ou compacto:

   (a) $f(x, y) = \frac{x \log(1+x^2-y)}{y}$

   (b) $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{1-(x^2+y^2)}$

   (c) $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{x-z}$

   (d) $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}, e^x, \log(z))$

6. Estude os seguintes limites

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{y}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2 + 3}{1 - 2y}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2 \mathrm{sen}(\pi x)}{(x-2)^2+(y-1)^2}$

7. Estude a continuidade das seguintes funções no seu domínio

   (a) $f(x,y) = \cos(1+\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2})$

   (b) $f(x,y) = (x^3 e^{x+y}, \frac{xy}{1+x^2})$

   (c) $f(x,y) = (\mathrm{tg}(x), \frac{xy}{x^2-2})$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & x \neq 0 \\ 2y-1, & x = 0 \end{cases}$

8. Mostre que a função

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^5}{x^2+y^4}$$

   é prolongável por continuidade à origem e determine o seu prolongamento.