Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exercícios complementares aos da Ficha 1

Margarida Baía

1. **(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** Dados $x, y \in \mathbb{R}^N$ prove que

$$|x \cdot y| \leq ||x||\, ||y||$$

[Sugestão: Observe que $||x + \alpha y||^2 \geq 0$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$]

2. Esboce os seguintes conjuntos

   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + 4y^2 \leq 4\}$
   b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq x^2 - 1\}$
   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y > 3x,\, y < x^2\}$
   d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y > 4 - x^2,\, x - 2y < 2\}$
   e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > -2y^2,\, |y| < 3\}$
   f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 - y^2 - 4x + 3 > 0\}$

3. Esboce o domínio das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\log(\mathrm{x+y})}$
   (b) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{2x-y+2}$
   (c) $f(x, y) = \frac{x\log(1+\mathrm{x}^2-\mathrm{y})}{y}$
   (d) $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{1-(x^2+y^2)}$
   (e) $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{x-z}$
   (f) $f(x, y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right)$
   (g) $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}, e^x, \log(\mathrm{z}))$