Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 9 de Abril de 2011 - 9h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

(3 val.) 1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que f é contínua na origem.

Resolução: Temos,

$$0 \leq \frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2+y^4} \leq \frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2} = (x^2+y^2) \to 0,$$

quando $(x,y) \to (0,0)$. Logo, f é contínua na origem.

2. Seja $h(x,y,z) = x^4 + y^2 + z^3$.

(1,5 val.) (a) Determine um vector $v \in \mathbb{R}^3$, não nulo, tal que a derivada de h segundo v no ponto $(1,1,1)$ seja 0.
Resolução: h é de classe C^1 e portanto é diferenciável. Logo,

$$\frac{\partial h}{\partial v}(1,1,1) = Dh(1,1,1) \cdot v = \nabla h(1,1,1) \cdot v = (4,2,3) \cdot v = 0.$$

Logo, uma solução possível é $v = (-2,4,0)$.

(2 val.) (b) Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $\gamma(1) = (1,1,1)$ e $\gamma'(1) = (1,2,3)$. Calcule $(h \circ \gamma)'(1)$.
Resolução: Temos, uma vez que h e γ são diferenciáveis,

$$(h \circ \gamma)'(1) = Dh(\gamma(1)) \cdot D\gamma(1) = \nabla h(1,1,1) \cdot \gamma'(1) = (4,2,3) \cdot (1,2,3) = 17.$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos de $g(x,y) = e^{-x^2+xy}$.
Resolução: A equação vectorial,

$$\nabla g(x,y) = ((-2x+y)e^{-x^2+xy}, xe^{-x^2+xy}) = (0,0)$$

tem apenas a solução $(x,y) = (0,0)$, pelo que a origem é o único ponto crítico.

A matriz hessiana de g é:

$$H_g(x,y) = \begin{bmatrix} -2e^{-x^2+xy} + (-2x+y)^2 e^{-x^2+xy} & e^{-x^2+xy} + (-2x+y)xe^{-x^2+xy} \\ e^{-x^2+xy} + (-2x+y)xe^{-x^2+xy} & x^2 e^{-x^2+xy} \end{bmatrix},$$

logo

$$H_g(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios desta matriz são as soluções de $-\lambda(-2-\lambda)-1=0$, ou seja $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}$. Logo, a matriz, tendo um valor próprio positivo e outro negativo, é indefinida e $(0,0)$ é um ponto em sela.

4. Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + e^y + z^2 = 3;\ x + e^y + z = 1\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

Resolução: O conjunto M é o conjunto de nível zero da função de classe C^1 definida por

$$F(x,y,z) = (x^2 + e^y + z^2 - 3, x + e^y + z - 1)$$

A matriz jacobiana

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & e^y & 2z \\ 1 & e^y & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica 1 nos pontos que verificam $\lambda(1, e^y, 1) = (2x, e^y, 2z)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, ou seja, nos pontos $(\frac{1}{2}, y, \frac{1}{2})$, com $y \in \mathbb{R}$. Substituindo estes pontos na segunda equação que define o conjunto obtemos $e^y = 0$, logo concluímos que os pontos não pertencem a M e a matriz jacobiana DF tem característica 2 em todos os pontos de M. Portanto M é uma variedade de dimensão 3-2=1.

(2 val.) (b) Mostre que M é o gráfico de uma função $f(z) = (x(z), y(z))$, de classe C^1, numa vizinhança do ponto $(1,0,-1)$ e calcule $x'(-1)$.

Resolução: A função F definida na resolução da alínea (a) é de classe C^1, satisfaz $F(1,0-1) = 0$ e

$$\det D_{(x,y)}F(1,0,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0,$$

logo, pelo Teorema da Função Implícita, podemos concluir que M é o gráfico de uma função $(x,y) = f(z)$ de classe C^1 numa vizinhança do ponto $(1,0,-1)$. Temos

$$\begin{aligned} Df(-1) &= -[D_{(x,y)}F(1,0,-1)]^{-1} \cdot D_z F(1,0,-1) = \\ &= -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donde concluímos que $x'(-1) = 3$.

(2,5 val.) 5. Sabendo que existe um vector de $\mathbb{R}^3$ cuja soma das componentes é igual a 9 e o seu comprimento é mínimo determine-o.

Resolução: O quadrado do comprimento de um vector $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é dado pela função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, devemos considerar a função

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z - 9)$$

e resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla g(x,y) = 0 \\ x + y + z = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ 2z + \lambda = 0 \\ x + y + z = 9 \end{cases}$$

Das três primeiras equações podemos concluir que $x = y = z$ e substituindo na última equação obtemos $x = 3$, logo obtemos o vector $(3, 3, 3)$ que tem comprimento $3\sqrt{3}$.

(2 val.) 6. Determine um ponto da hipérbole $y^2 - x^2 = 3$ para o qual a recta tangente nesse ponto tem a direcção do vector $(2, 1)$.

Resolução: A hipérbole é o conjunto de nível 0 da função de classe C^1 dada por $F(x, y) = y^2 - x^2 - 3$. No ponto (x, y) o espaço normal à hipérbole é gerado pelo vector $DF(x, y) = (-2x, 2y)$, logo o espaço tangente nesse ponto é gerado pelo vector $(2y, 2x)$. Para que a recta tangente nesse ponto tenha a direcção do vector $(2, 1)$ devemos ter $(2y, 2x) = \lambda(2, 1)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim as soluções do problema são as soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} 2y = 2\lambda \\ 2x = \lambda \\ y^2 - x^2 = 3 \end{cases}$$

As soluções são portanto os pontos $(1, 2)$ e $(-1, -2)$.

(2 val.) 7. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ duas variedades com $\dim A = a, \dim B = b$ e tal que para todo o $p \in A \cap B \neq \emptyset$ se tem $(T_pA)^\perp \cap (T_pB)^\perp = \{0\}$. Mostre que $A \cap B$ é uma variedade, determine a sua dimensão e determine o espaço tangente $T_p(A \cap B)$.

Resolução: Seja $p \in A \cap B$, $U \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança aberta de p e $F : U \to \mathbb{R}^{n-a}, G : U \to \mathbb{R}^{n-b}$ tal que $A \cap U$ e $B \cap U$ são descritas como conjuntos de nível $F = 0$ e $G = 0$ respectivamente, e tal que a característica de DF e DG são máximas (e iguais respectivamente a $n-a$ e $n-b$) em U. Então $A \cap B \cap U$ será descrita por $H = (F, G) = 0$.

As linhas da matriz $DF(p)$ formam uma base do espaço normal $T_pA^\perp$ e as linhas da matriz $DG(p)$ formam uma base do espaço normal $T_pB^\perp$. Como $(T_pA)^\perp \cap (T_pB)^\perp = \{0\}$, estes $n - a + n - b = 2n - a - b$ vectores são independentes e portanto $DH(p)$ tem característica máxima e igual a $2n - a - b$. Logo, $A \cap B$ é uma variedade de dimensão $n - (2n - a - b) = a + b - n$. Além disso, os vectores de $T_p(A \cap B)$ são perpendiculares a todas as linhas de $DH(p)$. Logo, $T_p(A \cap B) = T_pA \cap T_pB$.